ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
В. П. ГУРАРИЯ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Е. А. ГОРИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1972

УДК 517 : 519.4

Книга входит в завоевавшую мировое признание энциклопедию современной математики «Элементы математики», созданную группой французских ученых, выступающих под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки. Ряд томов этой энциклопедии уже вышел в русском переводе и получил заслуженно высокую оценку советских ученых. Этот выпуск, состоящий из двух глав: «Нормированные алгебры» и «Локально компактные коммутативные группы», выгодно отличается от прочих трудов Н. Бурбаки тем, что он мало связан с другими томами трактата, в нем нет излишней общности. Книга изобилует методическими усовершенствованиями и отражает самые современные результаты. Она представляет интерес для математиков различных специальностей — от студентов до научных работников.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
6-72

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Советскому читателю предлагается перевод первых двух глав «Спектральной теории» Н. Бурбаки. Коротко можно сказать, что здесь собран предварительный материал для построения спектральной теории в стандартном понимании этого словосочетания, а именно, элементы гельфандовской теории коммутативных банаховых алгебр и понтрягинской теории характеров, причем последняя развивается с общих позиций функционального анализа.

Разумеется, автор свободно пользуется ссылками на другие части своего обширного трактата, и это касается не только теорем, но и терминологии, а также обозначений (которые не всегда заново объясняются). В основном имеются ссылки на тома, посвященные топологии, алгебре и интегрированию, уже переведенные на русский язык. Вместе с тем искушенному читателю следует соблюдать известную осторожность, поскольку, например, в том, что касается банаховых алгебр, терминология, используемая Н. Бурбаки, далеко не всегда совпадает с принятой и устоявшейся в нашей математической литературе. Тем не менее, мы по понятным причинам не сочли возможным сколько-нибудь серьезно изменять терминологию автора.

В целом изложение характеризуется полнотой и ясностью; в частности, это относится к применениям аппарата голоморфных функций. Из многочисленных упражнений читатель сможет получить некоторое (правда, не совсем полное) представление о современном состоянии указанных областей.

В соответствии со своими правилами (Nomina sunt odiosa), Н. Бурбаки не указывает авторов теорем и избегает ссылок на сочинения других авторов. Надо полагать, что имена, как обычно, будут названы в конце.

Е. Горин

ГЛАВА I[1])

НОРМИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ

§ 1. Общие сведения об алгебрах

1. Алгебры с единицей

Пусть K — коммутативное тело, т. е. поле. Пусть A — алгебра над K, содержащая единичный элемент e. Пара (A, e) называется *алгеброй с единицей* над K, а алгебра A — ее *основанием*. Так как e однозначно определяется по алгебре A, то, допуская некоторую вольность речи, можно называть A алгеброй с единицей. Пусть (A, e) и (A', e') — две алгебры с единицей. *Морфизмом алгебр с единицей* из (A, e) в (A', e') называется морфизм φ из A в A', такой, что $\varphi(e) = e'$. Подалгеброй алгебры с единицей (A, e) называется пара (A', e), где A' — подалгебра A, содержащая e.

Единичный элемент часто обозначается символом 1.

Пусть A — алгебра над K. Напомним (*Алг.*, гл. VIII, прилож., п° 1), что на векторном пространстве $\tilde{A} = K \times A$ можно определить структуру алгебры, такую, что

$$(\lambda, a)(\mu, b) = (\lambda\mu, \lambda b + \mu a + ab).$$

Пусть $e = (1, 0)$. Тогда пара $(\tilde{A}, e)$ называется алгеброй с единицей, *полученной из A присоединением единицы*. Если A' — какая-нибудь другая алгебра над K, $(\tilde{A}', e')$ — алгебра с единицей, полученная из A' присоединением единицы, и φ — морфизм из A в A', то существует и притом единственный морфизм алгебр с единицей из $(\tilde{A}, e)$ в $(\tilde{A}', e')$, являющийся продолжением φ.

2. Спектр элемента в алгебре с единицей

Определение 1. *Пусть A — алгебра с единицей над полем K, и пусть e — ее единица. Для каждого $x \in A$ спектром x относительно A называется множество всех $\lambda \in K$, таких, что элемент $x - \lambda e$ не является обратимым в K.*

[1]) Результаты глав I и II опираются на материал книг I—VI и сводку результатов книги, посвященной многообразиям (Variétés). [При ссылках на нее используется сокращение (*Var.*, R.).]

Спектр будет обозначаться $\mathrm{Sp}_A x$ или, если это не приводит к недоразумению, $\mathrm{Sp}\, x$.

Замечания. 1) Если $A=\{0\}$, то $\mathrm{Sp}\, 0=\varnothing$.

2) Для каждого $\lambda\in K$ имеем $\mathrm{Sp}(\lambda e)=\{\lambda\}$ (если $A\neq\{0\}$).

3) Для того чтобы $x\in A$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы $0\notin \mathrm{Sp}\, x$.

4) Пусть $x\in A$ и $P\in K[X]$. Если $\lambda\in K$, то существует многочлен $P_1\in K[X]$, такой, что $P(x)-P(\lambda)e=(x-\lambda e)P_1(x)$; следовательно, если $\lambda\in \mathrm{Sp}\, x$, то $P(\lambda)\in \mathrm{Sp}\, P(x)$; иначе говоря, $P(\mathrm{Sp}\, x)\subset \mathrm{Sp}\, P(x)$. Обратно, пусть $\mu\in \mathrm{Sp}\, P(x)$; предположим, что K *алгебраически замкнуто* и $\deg P\geqslant 1$; пусть $P(X)-\mu=\alpha(X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n)$ — разложение многочлена $P(X)-\mu$ на множители первой степени. Имеем

$$P(x)-\mu e=\alpha(x-\lambda_1 e)\ldots(x-\lambda_n e).$$

Поэтому $\lambda_i\in \mathrm{Sp}\, x$ для некоторого i и, значит, $\mu=P(\lambda_i)\in P(\mathrm{Sp}\, x)$. Таким образом,

$$P(\mathrm{Sp}\, x)=\mathrm{Sp}\, P(x).$$

Это соотношение остается справедливым и в том случае, когда P — константа, если только $\mathrm{Sp}\, x\neq\varnothing$.

5) Если $x\in A$ — нильпотентный элемент, то, согласно замечанию 4, $(\mathrm{Sp}\, x)^n\subset\{0\}$ для некоторого n и, следовательно, $\mathrm{Sp}\, x=\{0\}$ (если $A\neq\{0\}$).

6) Предположим, что поле K алгебраически замкнуто. Пусть $x\in A$ и $R=P/Q\in K(X)$, где P и Q — взаимно простые многочлены. Предположим, далее, что $Q(x)$ обратим, т. е. $0\notin Q(\mathrm{Sp}\, x)$. Тогда можно образовать $R(x)=P(x)\cdot Q(x)^{-1}=Q(x)^{-1}\cdot P(x)$. Покажем, что если R — не константа, то справедливо равенство

$$\mathrm{Sp}(R(x))=R(\mathrm{Sp}\, x).$$

Действительно, заменяя в случае необходимости R на $R-\mu$ (где $\mu\in K$), достаточно установить эквивалентность

$$R(x)\ \text{обратим}\ \Leftrightarrow\ 0\notin R(\mathrm{Sp}\, x)$$

или

$$P(x)\ \text{обратим}\ \Leftrightarrow\ 0\notin P(\mathrm{Sp}\, x).$$

Но последнее следует из замечания 4, если P не константа, и очевидно, если P — константа, равная λ, так как $\lambda\neq 0$ в силу предположения относительно R.

7) Пусть A и B — две алгебры с единицей над K, $\varphi\colon A\to B$ — морфизм алгебр с единицей и $x\in A$. Тогда ясно, что $\mathrm{Sp}_B\varphi(x)\subset \mathrm{Sp}_A x$.

8) Пусть A — алгебра с единицей, $\mathfrak{R}$ — ее радикал (*Алг.*, гл. VIII, § 5), φ — канонический морфизм из A в $B = A/\mathfrak{R}$. Тогда если $x \in A$, то $\mathrm{Sp}_B \varphi(x) = \mathrm{Sp}_A x$. Действительно, достаточно доказать, что если $\varphi(x)$ обратим в B, то x обратим в A. Выберем такой элемент $y \in A$, что $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(e)$. Тогда $xy \in e + \mathfrak{R}$, $yx \in e + \mathfrak{R}$. Значит, xy и yx обратимы и, следовательно, x обратим. В частности, если $x \in \mathfrak{R}$, то $\mathrm{Sp}\, x = \{0\}$ (при условии, что $A \neq \{0\}$).

9) Пусть (B_i) — семейство алгебр с единицей, причем $B_i = (A_i, e_i)$. Положим $A = \prod_i A_i$, $e = (e_i)$. Тогда (A, e) — алгебра с единицей, называемая произведением алгебр B_i. Если $x = (x_i) \in A$, то $\mathrm{Sp}_A x = \bigcup_i \mathrm{Sp}_{A_i} x_i$.

Примеры. 1) Пусть A — алгебра непрерывных комплексных функций на топологическом пространстве. Тогда спектр элемента $f \in A$ совпадает с *множеством значений* функции f.

2) Пусть A — алгебра с единицей конечного ранга над полем $\mathbf{C}$. Для того чтобы элемент $x \in A$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы линейное преобразование $y \mapsto xy$ в A имело отличный от нуля детерминант. Поэтому спектр элемента x совпадает с множеством корней характеристического многочлена элемента x. Если A — алгебра эндоморфизмов векторного пространства V конечной размерности над полем $\mathbf{C}$, то спектр x совпадает, следовательно, с множеством *собственных значений* преобразования x. Этот результат, вообще говоря, не верен, когда $\dim V$ бесконечна (упр. 2).

Определение 2. *Пусть A — алгебра с единицей над K, и пусть $x \in A$. Для каждого $\lambda \in K - \mathrm{Sp}\, x$ положим*

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1}.$$

Функция $\lambda \mapsto R(x, \lambda) \in A$ называется резольвентой x.

При фиксированном x значения $R(x, \lambda)$ коммутируют. Действительно, если $\lambda, \mu \in K$, то имеет место равенство

$$(\lambda e - x) - (\mu e - x) = (\lambda - \mu) e.$$

Поэтому если $\lambda, \mu \notin \mathrm{Sp}\, x$, то

$$(\lambda - \mu) R(x, \lambda) R(x, \mu) = R(x, \mu) - R(x, \lambda). \tag{1}$$

Если $x, y \in A$ и $\lambda \in K$, то

$$(\lambda e - x) - (\lambda e - y) = y - x.$$

Поэтому если $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, x \cup \mathrm{Sp}\, y$, то

$$R(y, \lambda)(y - x) R(x, \lambda) = R(y, \lambda) - R(x, \lambda). \tag{2}$$

3. Спектр элемента в алгебре

Пусть A — алгебра над полем K и $x \in A$. Назовем спектром элемента x относительно A спектр x относительно алгебры с единицей $\tilde{A}$, полученной из A присоединением единицы.

Спектр в этом смысле обозначается $\mathrm{Sp}'_A x$ или, если это не приводит к недоразумению, $\mathrm{Sp}' x$. Заметим, что $0 \in \mathrm{Sp}'_A x$ для любого $x \in A$.

Если φ — морфизм из A в алгебру B, то $\mathrm{Sp}'_B \varphi(x) \subset \mathrm{Sp}'_A x$.

Замечания. 1) Пусть A — алгебра с единицей. Рассмотрим ее основание, обозначая его по-прежнему через A. Если $x \in A$, то

$$\mathrm{Sp}'_A x = \mathrm{Sp}_A x \cup \{0\}.$$

Действительно, пусть ε — единица алгебры A и e — единица алгебры $\tilde{A}$. Нетрудно проверить, что $(e-\varepsilon) \cdot A = A \cdot (e-\varepsilon) = 0$, т. е. что алгебра $\tilde{A}$ представляется в виде произведения A и $K(e-\varepsilon)$. Наше утверждение теперь следует из замечания 9, n° 2.

2) Из предыдущего замечания вытекает, что если B — алгебра над K и $x \in B$, то

$$\mathrm{Sp}'_B x = \mathrm{Sp}_{\tilde{B}} x = \mathrm{Sp}_{\tilde{B}} x \cup \{0\} = \mathrm{Sp}'_{\tilde{B}} x.$$

3) Если x принадлежит радикалу алгебры A, то $\mathrm{Sp}'_A x = \{0\}$. Это следует из замечания 8, n° 2.

Предложение 1. *Пусть A — некоторая алгебра и $x, y \in A$. Тогда*

$$\mathrm{Sp}'(xy) = \mathrm{Sp}'(yx).$$

Переходя к алгебре $\tilde{A}$, можно ограничиться тем случаем, когда A содержит единицу e. Тогда достаточно доказать, что если $\lambda \neq 0$ и если элемент $xy - \lambda e$ имеет обратный z, то элемент $yx - \lambda e$ также обратим. Имеем

$$(yx - \lambda e)(yzx - e) = y(xyz)x - yx - \lambda yzx + \lambda e = \\ = y(\lambda z + e)x - yx - \lambda yzx + \lambda e = \lambda e,$$

а также $(yzx - e)(yx - \lambda e) = \lambda e$. Так как $\lambda \neq 0$, то из этих равенств следует, что элемент $yx - \lambda e$ обратим.

Можно указать такую алгебру с единицей A и такие элементы $x, y \in A$, что $\mathrm{Sp}(xy) \neq \mathrm{Sp}(yx)$ (упр. 3).

4. Наполненные подалгебры

Определение 3. *Пусть A — алгебра с единицей. Подалгебра с единицей $B \subset A$ называется наполненной*[1]*, если каждый элемент из B, обратимый в A, обратим в B.*

Если B — наполненная подалгебра в A, то для каждого элемента $x \in B$ справедливо равенство $\mathrm{Sp}_B x = \mathrm{Sp}_A x$. Пересечение любого семейства наполненных подалгебр в A является снова наполненной подалгеброй в A. Следовательно, если $M \subset A$, то пересечение B всех наполненных подалгебр алгебры A, содержащих M, является наименьшей наполненной подалгеброй, содержащей M. Такая подалгебра B называется наполненной подалгеброй в A, *порожденной* множеством M. Коммутант M' множества M в A является наполненной подалгеброй в A (так как если элемент x обратим в A и коммутирует с M, то x^{-1} также коммутирует с M). Поэтому бикоммутант M'' множества M содержит B. Если элементы из M коммутируют, то алгебра M'' коммутативна и, значит, B также коммутативна.

Всякая максимальная коммутативная подалгебра в A является наполненной подалгеброй, так как она совпадает со своим коммутантом.

Пусть $x \in A$ и B — наполненная подалгебра в A, порожденная элементом x. Тогда B совпадает с множеством B_1 всех элементов вида $P(x)Q(x)^{-1}$, где $P \in K[X]$, $Q \in K[X]$ и $Q(x)$ обратим в A. В самом деле, B_1 — подалгебра в A, содержащая e; если элемент $P(x)Q(x)^{-1}$ обратим в A, то и элемент $P(x)$ обратим в A и, значит, элемент $P(x)^{-1}Q(x)$, обратный к $P(x)Q(x)^{-1}$, принадлежит B_1. Таким образом, B_1 — наполненная подалгебра и $B \subset B_1$. С другой стороны, если $P \in K[X]$, $Q \in K[X]$ и $Q(x)$ обратим в A, то $P(x) \in B$, $Q(x) \in B$ и, значит, $Q(x)^{-1} \in B$ и $P(x)Q(x)^{-1} \in B$. Следовательно, $B_1 \subset B$.

5. Характеры коммутативной алгебры с единицей

Определение 4. *Пусть A — коммутативная алгебра с единицей. Характером алгебры A называется морфизм алгебр с единицей из A в K.*

Множество всех характеров алгебры A обозначается через $X(A)$.

Пусть A и B — две коммутативные алгебры с единицей, h — морфизм алгебр с единицей из A в B. Отображение

[1]) В теории групп в аналогичной ситуации употребляется термин *сервантная*. — *Прим. ред.*

$\chi \mapsto \chi \circ h$ из $X(B)$ в $X(A)$ обозначается через $X(h)$. Если k — морфизм из B в коммутативную алгебру с единицей, то $X(k \circ h) = X(h) \circ X(k)$. Если 1_A — тождественное отображение алгебры A, то $X(1_A)$ — тождественное отображение множества $X(A)$.

Если h — сюръективный морфизм, то $X(h)$ является биекцией из $X(B)$ на множество тех характеров алгебры A, которые аннулируются на ядре морфизма h.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — коммутативные алгебры с единицей и A — алгебра с единицей $A_1 \times \ldots \times A_n$. Пусть, далее, π_i — каноническое отображение из A на A_i. Тогда $X(\pi_i)$ есть биекция $X(A_i)$ на некоторую часть X_i в $X(A)$, а именно на множество тех характеров алгебры A, которые обращаются в нуль на $\prod_{j \neq i} A_j$. Ясно, что X_i попарно не пересекаются. С другой стороны, пусть $\chi \in X(A)$, и пусть i — такой индекс, что $\chi(x) \neq 0$ для некоторого $x \in A_i$; для всех $j \neq i$ и всех $y \in A_j$ имеем

$$\chi(x)\chi(y) = \chi(xy) = \chi(0) = 0.$$

Следовательно, $\chi(A_j) = 0$, и поэтому характер χ аннулируется на $\prod_{j \neq i} A_j$, так что $X(A)$ является объединением X_i.

Пусть B — алгебра с единицей $A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$. Тогда

$$\chi \mapsto (\chi \mid A_1, \ldots, \chi \mid A_n)$$

есть отображение из $X(B)$ в $X(A_1) \times \ldots \times X(A_n)$, а

$$(\chi_1, \ldots, \chi_n) \mapsto \chi_1 \otimes \ldots \otimes \chi_n$$

является отображением из $X(A_1) \times \ldots \times X(A_n)$ в $X(B)$. Легко проверить, что композиции этих отображений являются тождественными отображениями множества $X(B)$ и множества

$$X(A_1) \times \ldots \times X(A_n).$$

Поэтому можно отождествить $X(B)$ и $X(A_1) \times \ldots \times X(A_n)$.

Пусть A — коммутативная алгебра с единицей. Пусть Y — множество всех ее идеалов коразмерности 1. Для каждого $\chi \in X(A)$ имеем $\operatorname{Ker} \chi \subset Y$. Отображение $\chi \mapsto \operatorname{Ker} \chi$ является биекцией $X(A)$ на Y. Действительно, если $\mathfrak{J} \in Y$, то существует единственный изоморфизм K-алгебры с единицей $A/\mathfrak{J}$ на K, и композиция морфизмов

$$A \to A/\mathfrak{J} \to K$$

является единственным характером алгебры A с ядром $\mathfrak{J}$.

Если $x \in A$ и $\chi \in X(A)$, то $\chi(x) \in \operatorname{Sp} x$; действительно, так как $\chi(x - \chi(x)e) = 0$, то элемент $x - \chi(x)e$ не обратим.

Для каждого элемента $x \in A$ обозначим через $\mathscr{G}_A x$, или просто $\mathscr{G}x$, функцию $\chi \mapsto \chi(x)$, определенную на $\mathrm{X}(A)$, и назовем ее *преобразованием Гельфанда элемента* x. Отображение $\mathscr{G}$ есть морфизм алгебры с единицей A в алгебру с единицей A_1 функций на $\mathrm{X}(A)$ со значениями в K; это отображение называется *преобразованием Гельфанда*. Пусть B — коммутативная алгебра с единицей над полем K, B_1 — алгебра с единицей всех функций на $\mathrm{X}(B)$ со значениями в K, h — морфизм алгебр с единицей из A в B; тогда отображение $\mathrm{X}(h)$: $\mathrm{X}(B) \to \mathrm{X}(A)$ определяет морфизм алгебр с единицей h_1: $A_1 \to B_1$, и диаграмма

(3)
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathscr{G}_A} & A_1 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_1} \\ B & \xrightarrow[\mathscr{G}_B]{} & B_1 \end{array}$$

является коммутативной. Действительно, для каждого $x \in A$ и каждого $\chi \in \mathrm{X}(B)$ имеем

(4)
$$\begin{aligned} \mathscr{G}_B(h(x))(\chi) = \chi(h(x)) = (\mathrm{X}(h)(\chi))(x) = \\ = \mathscr{G}_A(x)(\mathrm{X}(h)(\chi)) = h_1(\mathscr{G}_A(x))(\chi). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что K — топологическое тело. Наделим $\mathrm{X}(A)$ топологией поточечной (простой) сходимости на A и топологическое пространство $\mathrm{X}(A)$ назовем *пространством характеров алгебры* A. Эта топология в $\mathrm{X}(A)$ является слабейшей топологией, в которой функции $\mathscr{G}_A x$ для всех $x \in A$ непрерывны. Если h — морфизм алгебр с единицей из A в B, то отображение $\mathrm{X}(h)$: $\mathrm{X}(B) \to \mathrm{X}(A)$ непрерывно. Если h — сюръективный морфизм, то образ $\mathrm{X}(h)$ — множество всех характеров алгебры A, равных нулю на ядре морфизма h, — замкнут в $\mathrm{X}(A)$; с другой стороны, топология на $\mathrm{X}(h)(\mathrm{X}(B))$, индуцированная топологией на $\mathrm{X}(B)$ с помощью отображения $\mathrm{X}(h)$, есть топология простой сходимости в A, т. е. эта топология индуцируется топологией в $\mathrm{X}(A)$; другими словами, $\mathrm{X}(h)$ является *гомеоморфизмом* пространства $\mathrm{X}(B)$ на некоторую замкнутую часть в $\mathrm{X}(A)$.

Объединяя сказанное выше, мы видим, что пространство $\mathrm{X}(A_1 \times \ldots \times A_n)$ отождествляется с топологической суммой пространств $\mathrm{X}(A_1), \ldots, \mathrm{X}(A_n)$. Точно так же, $\mathrm{X}(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)$ отождествляется с топологическим произведением пространств $\mathrm{X}(A_1) \times \ldots \times \mathrm{X}(A_n)$.

6. Случай алгебр без единицы

Определение 5. *Пусть A — коммутативная алгебра. Характером алгебры A называется морфизм из A в K.*

Множество всех характеров алгебры A обозначим $X'(A)$. Положим $X(A) = X'(A) - \{0\}$. Если A обладает единицей e, то $X(A)$ является множеством всех характеров алгебры с единицей (A, e). Действительно, для того чтобы характер $\chi \in X'(A)$ был ненулевым, необходимо и достаточно, чтобы $\chi(e) = 1$.

Если h: $A \to B$ — морфизм коммутативных алгебр, то, как и выше, определяется отображение $X'(h)$: $X'(B) \to X'(A)$, которое переводит 0 в 0. Имеем $X'(k \circ h) = X'(h) \circ X'(k)$. Если h сюръективен, то $X'(h)$ биективно отображает $X'(B)$ на множество всех характеров алгебры A, обращающихся в нуль на ядре h. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — коммутативные алгебры, $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ и π_i: $A \to A_i$ — канонический морфизм, тогда $X'(\pi_i)$ — биекция множества $X'(A_i)$ на часть X'_i множества $X'(A)$, а именно на множество всех характеров алгебры A, обращающихся в нуль на $\prod_{j \neq i} A_j$; как и в п° 5, мы видим, что $X'(A)$ является объединением множеств X'_i. С другой стороны, $X'_i \cap X'_j = \{0\}$ для $i \neq j$; в частности, $X'_i - \{0\}$ образуют разбиение пространства $X'(A) - \{0\} = X(A)$.

Для всякого $x \in A$ через $\mathscr{G}'_A x$ или просто $\mathscr{G}' x$ обозначается функция $\chi \mapsto \chi(x)$, определенная на $X'(A)$. Отображение $\mathscr{G}'$ является морфизмом из A в алгебру A_1 функций $X'(A) \to K$, обращающихся в нуль в точке 0. Пусть B — коммутативная алгебра, B_1 — алгебра всех функций $X'(B) \to K$, равных нулю в точке 0, h — морфизм из A в B; тогда $X'(h)$ определяет морфизм h_1: $A_1 \to B_1$, такой, что $h_1 \circ \mathscr{G}'_A = \mathscr{G}'_B \circ h$. Обозначим через $\mathscr{G}_A x$ (или просто $\mathscr{G} x$) ограничение $\mathscr{G}'_A x$ на $X(A)$ и назовем его *преобразованием Гельфанда элемента x*.

Пусть $\tilde{A}$ — алгебра с единицей, полученная из A присоединением единицы. Ограничение на A любого характера алгебры $\tilde{A}$ определяет характер алгебры A; обратно, каждый характер на A допускает единственное продолжение до характера $\tilde{A}$. Поэтому определена каноническая биекция из $X'(A)$ в $X(\tilde{A})$, позволяющая отождествить эти два множества. Таким образом, характер 0 алгебры A отождествляется с единственным характером алгебры $\tilde{A}$ — тем, ядро которого совпадает с A.

Отображение $\chi \mapsto \operatorname{Ker} \chi$ является биекцией из $X(A)$ на множество регулярных идеалов коразмерности 1 в A (*Алг.*,

гл. VIII, прилож., n° 1); действительно, с одной стороны, $X(A)$ можно отождествить с множеством характеров алгебры $\tilde{A}$, не обращающихся в нуль на A; с другой стороны, отображение $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a} \cap A$ является биекцией множества максимальных идеалов в $\tilde{A}$, отличных от A, на множество максимальных регулярных идеалов в A (*Алг.*, гл. VIII, прилож., предл. 4); для завершения доказательства достаточно теперь применить сказанное в n° 5.

Если $x \in A$ и $\chi \in X'(A)$, то $\chi(x) \in \mathrm{Sp}_{\tilde{A}} x$ и, значит, $\chi(x) \in \mathrm{Sp}'_A x$.

Предположим теперь, что K — топологическое тело. Наделим $X'(A)$ топологией простой сходимости на A; полученное таким образом топологическое пространство мы попрежнему будем обозначать $X'(A)$. Если h — морфизм из A в B, то отображение $X'(h)$: $X'(B) \to X'(A)$ непрерывно. Если h сюръективен, то $X'(h)$ является гомеоморфизмом пространства $X'(B)$ на его образ, и этот образ замкнут в $X'(A)$. Рассмотрим $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ и используем те же обозначения, что и выше; $X'(\pi_i)$ есть гомеоморфизм пространства $X'(A_i)$ на X'_i, причем X'_i замкнуто в $X'(A)$; поэтому $X'_i - \{0\}$ открыто в $X'(A)$. Морфизмы $X'(\pi_i)$ определяют непрерывное отображение суммы S пространств $X'(A_i)$ на $X'(A)$; легко проверить, что образом объединения окрестностей точек $0 \in X'(A_1), \ldots, 0 \in X'(A_n)$ является окрестность точки $0 \in X'(A)$. Все это показывает, что $X'(A)$ канонически отождествляется с факторпространством суммы S. В частности, пространство $X(A)$ отождествляется с суммой пространств $X(A_i)$.

Если $x \in A$, то функция $\mathscr{G}'_A x$ непрерывна на $X'(A)$.

Каноническая биекция из $X'(A)$ на $X(\tilde{A})$ является гомеоморфизмом. Пусть B — алгебра с единицей над K и B' — ее основание. Тогда пространство $X(B)$ отождествляется с подпространством $X(B')$ в $X'(B')$.

7. *Примитивные идеалы*

Пусть A — алгебра над K, E — векторное пространство над K. Назовем *представлением* алгебры A в E морфизм из A в $\mathscr{L}(E)$. Два представления π_1 и π_2 алгебры A в пространствах E_1 и E_2 называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм E_1 в E_2, преобразующий π_1 в π_2. Представление π алгебры A в E называется *неприводимым*, если $E \neq \{0\}$ и если единственными подпространствами в E, инвариантными относительно $\pi(A)$, являются $\{0\}$ и E. Предположим, что π — неприводимое ненулевое представление. Если

ξ — ненулевой элемент в E, то $\pi(A)\xi$ — инвариантное относительно $\pi(A)$ ненулевое подпространство (в противном случае $K\xi = E$ и $\pi(A)=\{0\}$); поэтому $\pi(A)\xi = E$. Следовательно, аннулятор $\mathfrak{R}$ элемента ξ в A является левым регулярным идеалом (*Алг.*, гл. VIII, прилож., n° 2) и π эквивалентно представлению, определенному A-псевдомодулем $A/\mathfrak{R}$; так как π неприводимо, то $\mathfrak{R}$ является левым максимальным регулярным идеалом. Обратно, если $\mathfrak{R}'$ есть левый максимальный регулярный идеал в A, то представление алгебры A, определяемое A-псевдомодулем $A/\mathfrak{R}'$, является неприводимым и ненулевым.

Определение 6. *Пусть A — алгебра над K. Примитивным идеалом в A называется ядро неприводимого ненулевого представления алгебры A.*

Если A — коммутативная алгебра, то примитивные идеалы в A являются регулярными максимальными идеалами в A. Действительно, неприводимые ненулевые представления в A совпадают с точностью до эквивалентности с представлениями вида $\pi_{\mathfrak{R}}$, определенными A-псевдомодулем $A/\mathfrak{R}$ (где $\mathfrak{R}$ — максимальный регулярный идеал в A); в силу коммутативности A, ядро отображения $\pi_{\mathfrak{R}}$ совпадает с $\mathfrak{R}$.

Лемма 1. *Пусть π — неприводимое представление алгебры A в векторном пространстве E над K.*

(i) *Пусть $\mathfrak{J}$ — двусторонний идеал в A. Если $\pi(\mathfrak{J}) \neq 0$, то $\pi \mid \mathfrak{J}$ неприводимо.*

(ii) *Пусть $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ — два двусторонних идеала в A, таких, что $\pi(\mathfrak{J}_1) \neq 0$, $\pi(\mathfrak{J}_2) \neq 0$. Тогда $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$.*

Множество тех элементов E, которые аннулируются отображениями $\pi(\mathfrak{J})$, инвариантно относительно представления $\pi(A)$ и не совпадает с E, а следовательно, это множество $\{0\}$. Поэтому если ξ — ненулевой элемент из E, то $\pi(\mathfrak{J})\xi \neq 0$; так как $\pi(\mathfrak{J})\xi$ инвариантно относительно $\pi(A)$, то $\pi(\mathfrak{J})\xi = E$ и, таким образом, утверждение (i) доказано. С другой стороны, предыдущее рассуждение показывает, что $\pi(\mathfrak{J}_2)E = E$, $\pi(\mathfrak{J}_1)\pi(\mathfrak{J}_2)E = E$; следовательно, $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ — два двусторонних идеала в A, а $\mathfrak{J}$ — примитивный идеал в A. Тогда если $\mathfrak{J}$ содержит $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$ (в частности, если $\mathfrak{J}$ содержит $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$), то $\mathfrak{J}$ содержит либо $\mathfrak{J}_1$, либо $\mathfrak{J}_2$.*

Пусть π — неприводимое представление с ядром $\mathfrak{J}$. Если $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_2$, то, как показывает лемма 1 (ii), $\pi(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) \neq 0$, откуда следует, что $\mathfrak{J} \not\supset \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$.

Лемма 3. *Предположим, что алгебра A содержит единичный элемент. Пусть $\mathfrak{J}$ — двусторонний максимальный идеал в A. Тогда $\mathfrak{J}$ является примитивным идеалом.*

Существует левый максимальный идеал $\mathfrak{M}$ в A, содержащий $\mathfrak{J}$. Пусть π — каноническое (ненулевое, неприводимое) представление A в $A/\mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{J}A \subset \mathfrak{M}$, то ядро $\mathfrak{J}'$ представления π содержит $\mathfrak{J}$; следовательно, $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}$ и $\mathfrak{J}$ является примитивным идеалом.

Пусть $J(A)$ — множество всех примитивных идеалов в A. Для каждой части M алгебры A обозначим через $V(M)$ миожество всех примитивных идеалов в A, содержащих M. Ясно, что если $\mathfrak{J}$ — двусторонний идеал в A, порожденный M, то $V(M) = V(\mathfrak{J})$; если M сводится к единственному элементу x, то вместо $V(\{x\})$ мы будем писать $V(x)$. Отображение $M \longmapsto V(M)$ является монотонным (убывающим) по отношению включения. Имеем

$$V(0) = J(A), \quad V(1) = \varnothing, \tag{5}$$

$$V\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = V\left(\sum_{i\in I} M_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(M_i) \tag{6}$$

для любого семейства $(M_i)_{i\in I}$ частей алгебры A. С другой стороны, согласно лемме 2,

$$V(\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2) = V(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2) = V(\mathfrak{J}_1) \cup V(\mathfrak{J}_2) \tag{7}$$

для любой пары двусторонних идеалов $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ в A. Формулы (5) — (7) показывают, что части $V(M)$ в $J(A)$ являются замкнутыми в некоторой топологии на $J(A)$. Эта топология называется *топологией Джекобсона на* $J(A)$.

Пусть T — некоторая часть в $J(A)$ и $\mathfrak{k}(T)$ — пересечение всех элементов (идеалов), входящих в T. Ясно, что $\mathfrak{k}(T)$ — двусторонний идеал в A. Тогда замыкание T в $J(A)$ есть наименьшая замкнутая часть в $J(A)$, содержащая T, т. е. $V(\mathfrak{k}(T))$.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ — два различных элемента в $J(A)$. Эти элементы отделены в топологии $J(A)$.*

Действительно, пусть, например, $\mathfrak{J}_1 \not\subset \mathfrak{J}_2$. Множество всех $\mathfrak{J} \in J(A)$, содержащих $\mathfrak{J}_1$, является замкнутой частью T в $J(A)$, такой, что $\mathfrak{J}_1 \in T$, $\mathfrak{J}_2 \notin T$.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{J} \in J(A)$. Для того чтобы $\{\mathfrak{J}\}$ было замкнутым в пространстве $J(A)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{J}$ был максимальным примитивным идеалом.*

Действительно, замыкание одноэлементного множества $\{\mathfrak{J}\}$ состоит из примитивных идеалов в A, содержащих $\mathfrak{J}$.

Пусть $\hat{A}$ — множество всех классов неприводимых ненулевых представлений алгебры A. Если каждому представлению $\pi \in \hat{A}$ поставить в соответствие его ядро, то получится сюръективное отображение $\hat{A} \to J(A)$. Топология в $J(A)$ определяет топологию в $\hat{A}$, замкнутыми множествами в которой служат прообразы замкнутых множеств в $J(A)$ при отображении $\hat{A} \to J(A)$.

Предложение 4. *Если алгебра A содержит единицу, то пространства $J(A)$ и $\hat{A}$ квазикомпактны.*

Доказательство достаточно провести для $J(A)$. Пусть (T_j) — семейство замкнутых частей в $J(A)$ с пустым пересечением. Если бы $\sum_j \mathfrak{f}(T_j) \neq A$, то оказалось бы, что $\sum_j \mathfrak{f}(T_j)$ содержится в некотором двустороннем максимальном идеале $\mathfrak{J}$. Но $\mathfrak{J}$ — примитивный идеал (лемма 3). Поэтому $\mathfrak{J} \in T_j$ для каждого j, так как T_j замкнуто, и мы пришли к противоречию. Следовательно, $\sum_j \mathfrak{f}(T_j) = A$. Поэтому $1 = x_1 + \ldots + x_n$, где $x_1 \in \mathfrak{f}(T_{j_1}), \ldots, x_n \in \mathfrak{f}(T_{j_n})$. Следовательно, $\mathfrak{f}(T_{j_1}) + \ldots + \mathfrak{f}(T_{j_n}) = A$ и $T_{j_1} \cap \ldots \cap T_{j_n} = \varnothing$.

Предположим, что A — *коммутативная алгебра с единицей*. Топология Джекобсона на $J(A)$ является топологией, индуцированной на $J(A)$ топологией Зарисского простого спектра A (*Комм. алг.*, гл. II, § 4, n° 3, опр. 4).

Предположим, что алгебра A коммутативна, а K наделено топологией. Канонический изоморфизм K на $\mathscr{L}(K)$ позволяет отождествить элементы пространства $\mathrm{X}(A)$ с представлениями алгебры A в векторном пространстве K. Тем самым определяется отображение $\mathrm{X}(A)$ в $\hat{A}$, являющееся, очевидно, инъективным. Можно, следовательно, отождествить $\mathrm{X}(A)$ с некоторой частью пространства $\hat{A}$.

Предложение 5. *Топология, индуцированная на $\mathrm{X}(A)$ топологией в $\hat{A}$, слабее исходной топологии в $\mathrm{X}(A)$.*

Действительно, пусть T — замкнутая часть в $\hat{A}$. Тогда T есть множество представлений $\pi \in \hat{A}$ с ядром, содержащим некоторую часть M алгебры A. Поэтому $T \cap \mathrm{X}(A)$ является множеством тех $\chi \in \mathrm{X}(A)$, которые аннулируются на M, т. е. замкнутой частью $\mathrm{X}(A)$. Предложение доказано.

В общем случае $\mathrm{X}(A)$ не является подпространством в $\hat{A}$ (см. § 7, упр. 6c).

§ 2. Нормированные алгебры

1. Общие сведения

Определение 1. *Нормированной комплексной алгеброй называется алгебра A над полем* **C**, *снабженная нормой* $x \mapsto \| x \|$, *такой, что*

$$\| xy \| \leqslant \| x \| \| y \| \tag{1}$$

для любых $x, y \in A$. *Если пространство* A *полно по этой норме, то говорят, что* A *— банахова алгебра.*

Это определение несколько отличается от данного ранее (*Общ. топ.*, гл. IX, 2-е изд., § 3, n° 7), где требуется в отличие от (1), чтобы норма удовлетворяла условию $\| xy \| \leqslant a \| x \| \cdot \| y \|$ (a — неотрицательная постоянная). Однако мы видели (см. там же), что тогда существует эквивалентная норма, удовлетворяющая условию (1). На протяжении всей этой главы мы придерживаемся определения 1. Слово «комплексная», как правило, опускается, и всюду, где не оговорено противное, подразумевается, что основным полем служит поле **C**.

Пусть A — нормированная алгебра. Каждая подалгебра в A, снабженная индуцированной нормой, является нормированной алгеброй. Если $\mathfrak{m}$ — двусторонний замкнутый идеал в A, то алгебра $A/\mathfrak{m}$, снабженная нормой

$$\| \dot{x} \| = \inf_{x \in \dot{x}} \| x \| \quad (\dot{x} \in A/\mathfrak{m}),$$

является нормированной алгеброй. Алгебра, противоположная к A, с той же нормой, а также пополнение алгебры A суть нормированные алгебры. Если $A_1, \ldots, A_n$ — нормированные алгебры, то алгебра $A_1 \times \ldots \times A_n$, снабженная нормой

$$\| (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \| x_i \|,$$

является нормированной алгеброй.

Пусть (y_λ) — семейство элементов из A; наименьшая замкнутая подалгебра B в A, содержащая все элементы y_λ, называется замкнутой подалгеброй в A, порожденной элементами y_λ; если $B = A$, то говорят, что y_λ *топологически порождают* нормированную алгебру A, или что (y_λ) — *система топологических образующих* нормированной алгебры A.

Пусть A — нормированная алгебра. Определим норму на $\tilde{A}$, полагая $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|$. Имеем

$$\begin{aligned}\|(\lambda, x)(\mu, y)\| &= |\lambda\mu| + \|xy + \mu x + \lambda y\| \leqslant \\ &\leqslant |\lambda||\mu| + \|x\|\|y\| + |\mu|\|x\| + |\lambda|\|y\| = \\ &= \|(\lambda, x)\|\|(\mu, y)\|.\end{aligned}$$

Поэтому $\tilde{A}$ превращается в нормированную алгебру, называемую *нормированной алгеброй с единицей, полученной из A присоединением единицы.*

Пусть A — нормированная алгебра. Для $x \in A$ пусть L_x и R_x — отображения $y \mapsto xy$ и $y \mapsto yx$ из A в A. Тогда $x \mapsto L_x$ (соответственно $x \mapsto R_x$) — морфизм алгебры A (соответственно, противоположной к A алгебры) в $\mathscr{L}(A)$, такой, что

$$\|L_x\| \leqslant \|x\|, \quad \|R_x\| \leqslant \|x\|. \tag{2}$$

Если A содержит единицу e, то $x = L_x e = R_x e$; следовательно,

$$\|x\| \leqslant \|L_x\| \cdot \|e\|, \quad \|x\| \leqslant \|R_x\| \cdot \|e\|. \tag{3}$$

Тогда $x \mapsto \|L_x\|$ и $x \mapsto \|R_x\|$ — нормы, эквивалентные исходной $x \mapsto \|x\|$, удовлетворяющие, кроме того, условию (1). Если к тому же $A \neq \{0\}$, иначе говоря, $e \neq 0$, то из (2) и (3) следует, что $\|e\| \geqslant 1$; очевидно, что $\|L_e\| = \|R_e\| = 1$.

2. Примеры

1) Пусть Ω — локально компактное пространство, A — алгебра комплексных функций, непрерывных на Ω и стремящихся к 0 на бесконечности, снабженная нормой

$$\|f\| = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

Тогда A является коммутативной банаховой алгеброй.

2) Пусть A — алгебра функций f: $[0, 1] \to \mathbf{C}$, непрерывных вместе со своими производными до порядка n включительно, снабженная нормой

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f^{(k)}(t)|.$$

Если f, $g \in A$, то

$$\|fg\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup |(fg)^{(k)}(t)| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sup \left| \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} f^{(s)}(t)\, g^{(k-s)}(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!\,(k-s)!} (\sup |f^{(s)}(t)|)(\sup |g^{(k-s)}(t)|) = \|f\| \cdot \|g\|.$$

Следовательно, A — коммутативная банахова алгебра с единицей.

3) Пусть G — локально компактная группа, снабженная мерой Хаара. Тогда $L^1(G)$ является банаховой алгеброй, в которой произведение определено как свертка (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, n°5, предл. 12). Если G — коммутативная группа, то эта банахова алгебра также коммутативна.

4) Возьмем в примере 3) $G = \mathbf{Z}$. Тогда $L^1(G)$ — банахова алгебра последовательностей $(c_n)_{-\infty < n < \infty}$, таких, что $\sum_n |c_n| < \infty$, относительно умножения $(c_n) * (c'_n) = (d_n)$, где $d_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p c'_{n-p}$, и нормы $\|(c_n)\| = \sum |c_n|$. Эта алгебра содержит в качестве единицы последовательность (e_n), для которой $e_n = 0$ при всех $n \neq 0$ и $e_0 = 1$. Для $x = (c_n)$ пусть $\varphi(x)$ — непрерывная на $\mathbf{U}$ функция, значение которой в точке e^{it} равно $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$. Легко проверить, что φ есть морфизм из $L^1(G)$ в алгебру A функций, непрерывных на $\mathbf{U}$, в которой умножение определено как обычное умножение. Интегрируя почленно равенство

$$\left(\sum_p c_p e^{ipt} \right) \cdot e^{-int} = (\varphi(x))(e^{it}) \cdot e^{-int},$$

получим, что

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi(x))(e^{it}) \cdot e^{-int}\, dt,$$

и, следовательно, морфизм φ инъективен. Алгебра A, снабженная нормой, которая индуцируется нормой в $L^1(G)$ с помощью φ, называется банаховой алгеброй абсолютно сходящихся рядов Фурье. Она содержит в качестве единицы функцию, тождественно равную 1. (См. гл. II, § 1, n°2 и 9).

5) Пусть Δ — круг $|z| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$. Пусть A — алгебра функций, непрерывных на Δ и аналитических во внутренних точках Δ, снабженная нормой $\|f\| = \sup_{t \in \Delta} |f(t)|$. Тогда A — коммутативная банахова алгебра с единицей.

6) Пусть E — банахово пространство. Пространство $\mathscr{L}(E)$ операторов в E с обычной нормой является банаховой алгеброй с единицей.

3. Спектральный радиус

Предложение 1. *Пусть A — нормированная алгебра. Последовательность $(\|x^n\|^{1/n})$ сходится при $n \to \infty$ для каждого $x \in A$, и ее предел равен $\inf_n \|x^n\|^{1/n}$.*

Положим $\alpha_n = \|x^n\|$. Если x — нильпотентный элемент, то предложение очевидно; поэтому мы можем считать, что $\alpha_n > 0$ для всех n. Имеет место неравенство $\alpha_{n+n'} \leqslant \alpha_n \alpha_{n'}$. Зафиксируем некоторое целое число $m > 0$. Для всякого целого $n \geqslant 0$ пусть $p(n)$, $q(n)$ — целые числа, такие, что $n = p(n)\, m + q(n)$, $0 \leqslant q(n) < m$. Имеет место неравенство

$$\alpha_n^{1/n} \leqslant \alpha_m^{p(n)/n} \alpha_{q(n)}^{1/n}.$$

Полагая в этом неравенстве $n \to \infty$, мы получим неравенство $\limsup_{n \to \infty} \alpha_n^{1/n} \leqslant \alpha_m^{1/m}$, из которого следует неравенство

$$\limsup_{n \to +\infty} \alpha_n^{1/n} \leqslant \inf_{m > 0} \alpha_m^{1/m} \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \alpha_n^{1/n},$$

доказывающее наше предложение.

Определение 2. *Для каждого элемента x нормированной алгебры число $\lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n > 0} \|x^n\|^{1/n}$ называется спектральным радиусом элемента x и обозначается через $\rho(x)$.*

Ясно, что

$$\rho(x) \leqslant \|x\|, \tag{4}$$

$$\rho(x^k) = \rho(x)^k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Если $\rho(x) = \|x\|$ для всякого $x \in A$, то в силу (5) имеем $\|x^2\| = \|x\|^2$. Обратно, предположим, что $\|x^2\| = \|x\|^2$ для любого $x \in A$. Тогда $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ для всех целых $n \geqslant 0$, следовательно, $\|x\| = \|x^{2^n}\|^{2^{-n}}$; полагая $n \to +\infty$, получаем, что $\|x\| = \rho(x)$.

Определение 3. *Элемент $x \in A$ называется квазинильпотентным, если* $\rho(x) = 0$.

Это определение можно видоизменить следующим образом: для любого $\lambda \in \mathbf{C}$ числа $\|(\lambda x)^n\|$ ограничены; или еще так: для любого $\lambda \in \mathbf{C}$ имеем $(\lambda x)^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечание. Функция $x \mapsto \rho(x)$ на A, будучи нижней гранью непрерывных функций $x \mapsto \|x^n\|^{1/n}$, полунепрерывна сверху; вообще говоря, она может не быть непрерывной; может даже случиться (упр. 5), что последовательность нильпотентных элементов в A сходится к элементу, который не является квазинильпотентным.

4. Обратимые элементы

Предложение 2. *Пусть A — банахова алгебра и x — некоторый элемент этой алгебры. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$, рассматриваемый как степенной ряд от λ, имеет в качестве радиуса сходимости число $1/\rho(x)$. Если A содержит единицу и если $\rho(x) < 1$, то элемент $1 - x$ обратим, и обратным к нему элементом является $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.*

Для радиуса сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$ имеет место формула

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n \to +\infty} \|x^n\|^{1/n}} = \frac{1}{\rho(x)}.$$

Если $\rho(x) < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ сходится абсолютно. Так как $(1 - x)\sum_{n=0}^{p} x^n = \left(\sum_{n=0}^{p} x^n\right)(1 - x) = 1 - x^{p+1}$, то элемент $(1 - x)^{-1}$ существует и равен $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Следствие 1. *Если алгебра A содержит единицу, то группа обратимых элементов в A содержит открытый шар с центром в 1 радиуса 1.*

Этот факт немедленно следует из того обстоятельства, что неравенство $\|x\| < 1$ влечет за собой $\rho(x) < 1$.

Напомним (*Общ. топ.*, гл. IX, § 3, предл. 13), что группа G обратимых элементов является *открытой* частью алгебры A, что топология на G, индуцированная топологией в A, согла-

сована со структурой группы и что топологическая группа G полна.

Следствие 2. *Пусть A — банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — левый (соответственно правый) регулярный максимальный идеал в A. Тогда идеал $\mathfrak{J}$ замкнут.*

Пусть $(\tilde{A}, e)$ — банахова алгебра, полученная из A присоединением единицы. Существует левый (соответственно правый) максимальный идеал $\mathfrak{J}$ в $\tilde{A}$, такой, что $\mathfrak{J} \cap A = \mathfrak{J}$ (*Алг.*, гл. VIII, прилож., предл. 4). Тогда $\mathfrak{J}$ не пересекается с открытым шаром с центром в e радиуса 1 (следствие 1), поэтому $\overline{\mathfrak{J}} \neq \tilde{A}$, и, стало быть, $\overline{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}$, т. е. идеал $\mathfrak{J}$ замкнут.

Следствие 3. *Радикал банаховой алгебры замкнут.*

Действительно, раднкал является пересечением всех левых регулярных максимальных идеалов (*Алг.*, гл. VIII, прилож., n° 3).

Предложение 3: *Пусть A — банахова алгебра с единицей.*

(i) *Если элемент $x \in A$ обладает левым (соответственно правым) обратным y, то каждый элемент $x' \in A$, такой, что $\|x' - x\| \leqslant \|y\|^{-1}$, обладает левым (соответственно правым) обратным.*

(ii) *Пусть (x_n) — последовательность элементов из A, обладающих левыми (соответственно правыми) обратными y_n, сходящаяся к некоторому $x \in A$. Если последовательность (y_n) ограничена, то x обратим слева (соответственно справа).*

Пусть $x, y, x' \in A$ таковы, что $yx = 1$ и $\|x' - x\| \leqslant \|y\|^{-1}$. Имеет место неравенство $\|1 - yx'\| = \|yx - yx'\| \leqslant \|y\| \times \times \|x - x'\| < 1$, из которого следует, что yx' — обратимый элемент, и, значит, x' обратим слева. Аналогично доказывается утверждение об обратимости справа.

Пусть x_n, y_n, $x \in A$ таковы, что $y_n x_n = 1$, x_n сходится к x при $n \to \infty$ и $\|y_n\| \leqslant M < +\infty$. Для достаточно больших n имеет место неравенство $\|x_n - x\| < M^{-1} \leqslant \|y_n\|^{-1}$, поэтому (ii) следует из (i).

Определение 4. *Пусть A — нормированная алгебра, x — элемент из A, L_x и R_x — отображения $y \mapsto xy$ и $y \mapsto yx$ в A. Говорят, что x — левый (соответственно правый) топологический делитель нуля, если L_x (соответственно R_x) не является гомеоморфизмом A на $L_x(A)$ (соответственно $R_x(A)$).*

Согласно *Общ. топ.*, гл. IX, 2-е изд., § 3, теор. 1, это определение можно сформулировать следующим образом: существует последовательность (z_n) в A, такая, что $\|z_n\| = 1$ и xz_n сходится к 0 (соответственно $z_n x$ сходится к 0).

Левый (соответственно правый) делитель нуля является левым (соответственно правым) топологическим делителем нуля. Предположим, что A содержит единицу. Левый (соответственно правый) топологический делитель нуля не обратим слева (соответственно справа); в самом деле, если, например, $yx=1$ и xz_n сходится к 0, то $z_n=y(xz_n)$ сходится к нулю, и условие $\|z_n\|=1$ не может выполняться для всех n.

Предложение 4. *Пусть A — банахова алгебра с единицей. Если элемент x в A не обратим слева, но является пределом последовательности (x_n) обратимых слева элементов, то x — правый топологический делитель нуля.*

Пусть y_n — левый обратный к x_n. Согласно предложению 3 (ii), $\|y_n\|$ стремится к $+\infty$. Пусть $z_n=\|y_n\|^{-1}y_n$. Тогда $\|z_n\|=1$ и $z_nx_n=\|y_n\|^{-1}$ стремится к нулю, а значит, $z_nx=z_nx_n+z_n(x-x_n)$ стремится к нулю.

Предложение 5. *Пусть A — нормированная алгебра с единицей, B — наполненная подалгебра в A. Тогда $\bar{B}$ — также наполненная подалгебра в A.*

Действительно, пусть x — элемент из $\bar{B}$, обратимый в A, и (x_n) — последовательность точек в B, стремящаяся к x. Тогда для достаточно больших n элемент x_n обратим в A и x_n^{-1} стремится к x^{-1}. Так как $x_n^{-1}\in B$, то $x^{-1}\in\bar{B}$.

Если (y_λ) — некоторое семейство элементов в A и B — наполненная подалгебра в A, порожденная этим семейством, то $\bar{B}$ есть наименьшая замкнутая наполненная подалгебра в A, содержащая все y_λ. Она называется *замкнутой наполненной подалгеброй, порожденной элементами y_λ.*

5. Спектр элемента в нормированной алгебре

Теорема 1. *Пусть A — банахова алгебра с единицей и $x\in A$.*
(i) *$\operatorname{Sp}x$ является компактной частью в $\mathbf{C}$.*
(ii) *Радиус наименьшего замкнутого круга в $\mathbf{C}$ с центром в нуле, содержащего $\operatorname{Sp}x$, равен $\rho(x)$.*
(iii) *Резольвента $\lambda\mapsto R(\lambda, x)$ элемента x есть голоморфная функция в области $\mathbf{C}-\operatorname{Sp}x$, обращающаяся в нуль на бесконечности. Имеет место равенство*

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda, x)=(-1)^k k!\,R(\lambda, x)^{k+1}.$$

Пусть $\lambda_0 \in \mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$ и $y = x - \lambda_0$. Если $\mu \in \mathbf{C}$, причем $|\mu| < \|y^{-1}\|^{-1}$, то элемент $x - (\lambda_0 + \mu) = y - \mu = y(1 - \mu y^{-1})$ обратим, и для обратного к нему элемента, в силу предложения 2, справедливо равенство

$$(x - (\lambda_0 + \mu))^{-1} = y^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n y^n. \tag{6}$$

Поэтому резольвента элемента x определена и голоморфна в открытом круге с центром в точке λ_0 радиуса $\|y^{-1}\|^{-1}$. Таким образом, доказано, что множество $\mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$ открыто и что резольвента элемента x голоморфна на этом множестве. Формула (1) § 1, n°2 позволяет написать равенство $\frac{d}{d\lambda} R(x, \lambda) = -R(x, \lambda)^2$, из которого с помощью индукции по k получается, что

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(x, \lambda) = (-1)^k k!\, R(\lambda, x)^{k+1}.$$

Для каждого $a \geqslant 0$ обозначим через Δ_a замкнутый круг в $\mathbf{C}$ с центром в точке 0 радиуса a. Пусть λ — не равное нулю комплексное число, такое, что $|\lambda|\rho(x) < 1$. Тогда, согласно предложению 2, элемент $x - \lambda^{-1} = \lambda^{-1}(\lambda x - 1)$ обратим и

$$(\lambda^{-1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} x^n. \tag{7}$$

Тем самым доказано, что резольвента элемента x определена и голоморфна вне $\Delta_{\rho(x)}$ и стремится к 0 на бесконечности. Предполагая, что существует число $a \in]0, \rho(x)[$, такое, что $\operatorname{Sp} x$ содержится в Δ_a, мы видим, что функция $\lambda \mapsto (\lambda^{-1} - x)^{-1}$ определена и голоморфна при $0 < |\lambda| < a^{-1}$ и стремится к 0 при λ, стремящемся к нулю, и что, следовательно, радиус сходимости ряда (7) не меньше $a^{-1} > \rho(x)^{-1}$; но это противоречит предложению 2. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть A — нормированная алгебра с единицей и $x \in A$. Если $A \neq \{0\}$, то $\operatorname{Sp} x \neq \varnothing$.*

Предположим сначала, что алгебра A полна. Если $\operatorname{Sp} x = \varnothing$, то резольвента элемента x голоморфна в $\mathbf{C}$ и равна нулю на бесконечности; следовательно, она тождественно равна нулю и, значит, $1 = x \cdot R(x, 0) = 0$ и $A = \{0\}$. В общем случае соотношение $\operatorname{Sp}_A x = \varnothing$ влечет за собой $\operatorname{Sp}_{\hat{A}} x = \varnothing$, откуда $\hat{A} = \{0\}$ и $A = \{0\}$.

Следствие 2 (теорема Гельфанда — Мазура). *Пусть A — нормированная алгебра над* $\mathbf{C}$. *Если A — тело, то* $A = \mathbf{C} \cdot 1$.

Если $x \in A$, то существует $\lambda \in \mathbf{C}$, такое, что элемент $x - \lambda$ не обратим (следствие 1), откуда $x - \lambda = 0$ и $x \in \mathbf{C} \cdot 1$.

Следствие 3. *Пусть A — банахова алгебра с единицей, x — обратимый элемент в A, такой, что* $\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$. *Тогда* $\operatorname{Sp} x \subset \mathbf{U}$.

Пусть Δ — круг $|z| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$. В силу теоремы 1 (ii), имеем $\operatorname{Sp} x \subset \Delta$ и $\operatorname{Sp} x^{-1} \subset \Delta$, что и доказывает утверждение (см. § 1, n°2, замечание 6).

Следствие 4. *Пусть X — комплексное банахово пространство, $\mathscr{L}(X)$ — алгебра непрерывных эндоморфизмов X и A — ненулевая подалгебра в $\mathscr{L}(X)$, такая, что X — простой A-псевдомодуль. Тогда*

(i) *Всякий эндоморфизм пространства X (не обязательно непрерывный), перестановочный с A, есть гомотетия.*

(ii) *Если u — некоторый эндоморфизм (не обязательно непрерывный) пространства X и если $\xi_1, \ldots, \xi_n \in X$, то существует элемент $v \in A$, такой, что $v\xi_1 = u\xi_1, \ldots, v\xi_n = u\xi_n$.*

Выберем элемент $\xi_0 \in X$, такой, что $A\xi_0 \neq \{0\}$ (следовательно, $A\xi_0 = X$). Пусть B — множество эндоморфизмов пространства X, перестановочных с A. Для всякого $u \in B$ пусть A_u — множество (непустое) всех элементов $v \in A$, таких, что $v\xi_0 = u\xi_0$; положим $\|u\| = \inf \|v\|$. Ясно, что если $u, u' \in B$ и $\lambda \in \mathbf{C}$, то $\|u + u'\| \leqslant \|u\| + \|u'\|$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$. С другой стороны, пусть $\varepsilon > 0$; существуют $v, v' \in A$, такие, что $v\xi_0 = u\xi_0$, $v'\xi_0 = u'\xi_0$, $\|v\| \leqslant \|u\| + \varepsilon$, $\|v'\| \leqslant \|u'\| + \varepsilon$; тогда $vv'\xi_0 = vu'\xi_0 = u'v\xi_0 = u'u\xi_0$, откуда $\|u'u\| \leqslant \|vv'\| \leqslant (\|u\| + \varepsilon) \cdot (\|u'\| + \varepsilon)$, и окончательно

$$\|u'u\| \leqslant \|u\| \cdot \|u'\|.$$

Таким образом, B — нормированная алгебра и $1 \in B$. Так как X — простой A-псевдомодуль, то B — тело (*Алг.*, гл. VIII, § 4, n°3, предл. 2, и прилож., n°2). Поэтому (следствие 2) $B = \mathbf{C} \cdot 1$.

Для доказательства утверждения (ii) достаточно установить следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть A — алгебра над полем K, M — простой A-псевдомодуль, такой, что $A \cdot M \neq \{0\}$. Для всякой конечной последовательности $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ элементов в M и каждого элемента b из бикоммутанта к M существует элемент $a \in A$, такой, что $ax_i = bx_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Анализ доказательства теоремы плотности (*Алг.*, гл. VIII, § 4, n° 2, теор. 1) показывает, что оно переносится без изменения на случай простых псевдомодулей, при условии, что справедлива приведенная там же лемма 1, т. е. частный случай сформулированной здесь леммы при $n=1$. Но множество N элементов $x \in M$, таких, что $A \cdot x = \{0\}$, является подпсевдомодулем в M, и так как оно по предположению не совпадает с M, то оно сводится к нулю; тогда для каждого $x \in M$ имеем $A \cdot x = M$ и, в частности, существует элемент $a \in A$, такой, что $ax = bx$.

Следствие 5. *Пусть A — банахова алгебра и $x \in A$. Тогда*

(i) $\mathrm{Sp}' x$ *— компактная часть в* $\mathbf{C}$.

(ii) *Радиус наименьшего замкнутого круга в* $\mathbf{C}$ *с центром в* 0, *содержащего* $\mathrm{Sp}' x$, *равен* $\rho(x)$.

(iii) *Для того чтобы элемент x был квазинильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{Sp}' x = \{0\}$.

Утверждения (i) и (ii) выводятся путем применения теоремы 1 к банаховой алгебре, полученной из A присоединением единицы. Утверждение (iii) следует из (ii).

Замечания. 1) Для произвольного непустого компакта в $\mathbf{C}$ можно указать банахову алгебру с единицей и такой ее элемент, спектр которого в точности совпадает с этим компактом (упр. 6).

2) Пусть A — банахова алгебра с единицей и $x \in A$. В силу теоремы 1, множество $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$ является открытой частью в $\mathbf{C}$ и, следовательно, локально связно. Поэтому его компоненты связности открыты. В силу теоремы 1, по крайней мере одна из этих компонент связности содержит множество тех $\lambda \in \mathbf{C}$, для которых $|\lambda| > \rho(x)$; все остальные компоненты связности, очевидно, ограничены.

6. Спектр относительно подалгебры

Предложение 6. *Пусть A — банахова алгебра с единицей, B — замкнутая подалгебра в A, содержащая* 1. *Тогда для каждого $x \in A$ справедливо соотношение* $\mathrm{Sp}_B x \supset \mathrm{Sp}_A x$ *и граница* $\mathrm{Sp}_A x$ *содержит границу* $\mathrm{Sp}_B x$.

Соотношение $\mathrm{Sp}_B x \supset \mathrm{Sp}_A x$ уже доказано (§ 1, n° 2, замечание 7). Если λ — точка границы $\mathrm{Sp}_B x$, то существует последовательность (λ_n) точек дополнения к $\mathrm{Sp}_B x$, стремящаяся к λ. Тогда элементы $x - \lambda_n$ обратимы в B и стремятся к элементу $x - \lambda$, который не является обратимым в B; следовательно, $x - \lambda$ есть левый или правый (предл. 4) топологический делитель нуля в B, а значит, и в A. Поэтому

$\lambda \in \mathrm{Sp}_A x$. Так как $\mathrm{Sp}_A x \subset \mathrm{Sp}_B x$, то λ не может быть внутренней точкой $\mathrm{Sp}_A x$.

Следствие. *Множество* $\mathrm{Sp}_B x$ *является объединением* $\mathrm{Sp}_A x$ *и, быть может, некоторых ограниченных компонент связности* $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$.

Пусть U — компонента связности множества $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$. Каждая точка границы $(\mathrm{Sp}_B x) \cap U$ в U является также точкой границы $\mathrm{Sp}_B x$ в $\mathbf{C}$ и, значит, точкой границы $\mathrm{Sp}_A x$ (предл. 6). Так как $U \cap \mathrm{Sp}_A x = \varnothing$, то $\mathrm{Sp}_B x \cap U$ не имеет граничных точек в U; но тогда, поскольку U связно, $\mathrm{Sp}_B x \cap U = \varnothing$ или U, чем и доказывается следствие.

Это следствие будет дополнено в § 3; см. следствия 1 и 2 предложения 9.

§ 3. Коммутативные баиаховы алгебры

1. Характеры коммутативной банаховой алгебры

Напомним, что основным полем здесь является $\mathbf{C}$.

Теорема 1. *Если* A *— коммутативная банахова алгебра, то каждый характер* A *непрерывен и его норма* $\leqslant 1$.

Пусть $\chi \in \mathrm{X}'(A)$. Для каждого $x \in A$ имеем $\chi(x) \in \mathrm{Sp}'_A x$ (§ 1, n° 6); следовательно, $|\chi(x)| \leqslant \rho(x) \leqslant \|x\|$ (§ 2, следствие 5 теоремы 1), что и доказывает теорему.

Следствие. *Пусть* A *— коммутативная банахова алгебра. Тогда пространство* $\mathrm{X}'(A)$ *компактно. Пространство* $\mathrm{X}(A)$ *локально компактно; оно компактно, если* A *содержит единицу.*

Пусть A' — банахово пространство, двойственное к A. Единичный шар A'_1 в A' слабо компактен (*Топ. вект. пр.*, гл. IV, § 5, предл. 4). В силу теоремы 1, $\mathrm{X}'(A) \subset A'_1$, и ясно, что $\mathrm{X}'(A)$ слабо замкнуто в A'. Следовательно, $\mathrm{X}'(A)$ компактно и $\mathrm{X}(A)$ локально компактно. Если A содержит единицу 1, то $\mathrm{X}(A)$ есть множество всех характеров $\chi \in \mathrm{X}'(A)$, таких, что $\chi(1) = 1$; поэтому оно замкнуто и, значит, компактно в $\mathrm{X}'(A)$.

Мы увидим (n° 2), что любое компактное пространство гомеоморфно $\mathrm{X}(A)$ для некоторой подходящей коммутативной алгебры A с единицей.

Теорема 2. *Пусть* A *— коммутативная банахова алгебра. Отображение* $\chi \longmapsto \mathrm{Ker}\,\chi$ *является биекцией* $\mathrm{X}(A)$ *на множество регулярных максимальных идеалов в* A.

Пусть $\mathfrak{J}$ — регулярный максимальный идеал алгебры A. Так как он замкнут (§ 2, следствие 2 предложения 2), то $A/\mathfrak{J}$ — банахова алгебра. Но так как $A/\mathfrak{J}$ — тело (*Алг.*, гл. VIII, прилож., предл. 3), то размерность $A/\mathfrak{J}$ над $\mathbf{C}$ равна 1 (§ 2, следствие 2 теоремы 1) и, значит, коразмерность $\mathfrak{J}$ в A равна 1. Утверждение теоремы следует тогда из сказанного в § 1, n° 6.

Может случиться, что коммутативная банахова алгебра A без единицы не содержит ни одного максимального идеала; тогда $X'(A)$ сводится к $\{0\}$ (см. упр. 4).

Ясно, что множества $J(A)$ и $\hat{A}$ (§ 1, n° 7) можно отождествить с множеством $X(A)$. Это позволяет рассматривать на $X(A)$ и слабую топологию, и топологию Джекобсона, которая является менее сильной (§ 1, предл. 5). Когда мы будем рассматривать $X(A)$ без указания, о какой топологии идет речь, то всегда будет подразумеваться, что речь идет о слабой топологии.

2. *Примеры*

Предложение 1. *Пусть Ω — локально компактное пространство, A — алгебра непрерывных комплексных функций, стремящихся к 0 на бесконечности в Ω, снабженная нормой $\|f\| = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$. Для каждой замкнутой части Φ в Ω пусть $\mathfrak{J}_\Phi$ — множество всех $f \in A$, равных нулю на Φ. Тогда отображение $\Phi \mapsto \mathfrak{J}_\Phi$ является биекцией множества замкнутых частей в Ω на множество замкнутых идеалов в A.*

Ясно, что $\mathfrak{J}_\Phi$ — замкнутый идеал в A. Если $\Phi \neq \Phi'$, то существует $t \in \Phi'$, такое, что $t \notin \Phi$, и, значит, существует функция $f \in A$, равная нулю на Φ и не равная нулю в точке t. Тогда $f \in \mathfrak{J}_\Phi$ и $f \notin \mathfrak{J}_{\Phi'}$; следовательно, отображение $\Phi \mapsto \mathfrak{J}_\Phi$ инъективно. Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A. Пусть Φ — множество точек $t \in \Omega$, таких, что $f(t) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{J}$. Тогда Φ — замкнутая часть в Ω и $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}_\Phi$. Предположим, что $f \in \mathfrak{J}_\Phi$, $\varepsilon > 0$ и Ψ — компактное множество точек $t \in \Omega$, таких, что $|f(t)| \geqslant \varepsilon$. Для каждого $t \in \Psi$ существует функция $f_t \in \mathfrak{J}$, такая, что $|f_t(t)| > 1$, и, значит, такая, что $|f_t(u)| > 1$ в некоторой окрестности V_t точки t. Далее, существуют $t_1, \ldots, t_n \in \Psi$, такие, что

$$\Psi \subset V_{t_1} \cup \ldots \cup V_{t_n}.$$

Тогда $g_\varepsilon = f_{t_1}\bar{f}_{t_1} + \ldots + f_{t_n}\bar{f}_{t_n} \in \mathfrak{J}$ и $g_\varepsilon > 1$ на Ψ. Имеем $f\varepsilon^{-1}g_\varepsilon(1+\varepsilon^{-1}g_\varepsilon)^{-1} \in \mathfrak{J}$, и эта функция равномерно стремится к f, когда ε стремится к нулю. Таким образом, $f \in \bar{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}$, откуда $\mathfrak{J}_\Phi \subset \mathfrak{J}$ и, наконец, $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_\Phi$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{J}$ — идеал в A. Предположим, что для каждого $t \in \Omega$ существует элемент в $\mathfrak{J}$, не равный нулю в точке t. Тогда любая комплексная непрерывная на Ω функция f с компактным носителем K принадлежит $\mathfrak{J}$. В самом деле, конструкция, с помощью которой мы построили функцию g_ε при доказательстве предыдущего утверждения, позволяет здесь доказать существование функции $g \in \mathfrak{J}$, такой, что $g \geqslant 0$ на Ω и $g > 1$ на K. Теперь можно построить $h \in A$, такую, что $f = gh$, откуда $f \in \mathfrak{J}$.

Следствие 1. *Для каждого $t \in \Omega$ обозначим через $\mathfrak{J}_t$ множество $f \in A$, равных нулю в точке t. Тогда отображение $t \mapsto \mathfrak{J}_t$ является биекцией пространства Ω на множество замкнутых максимальных идеалов в A. Эти идеалы регулярны.*

Этот результат немедленно следует из предложения 1.

Обозначим через $\dot{\Omega}$ компакт, полученный из Ω присоединением бесконечно удаленной точки ω. Тогда A отождествляется с банаховой алгеброй комплексных непрерывных функций на $\dot{\Omega}$, равных нулю в точке ω. Имеет место

Следствие 2. *Для каждого $t \in \dot{\Omega}$ обозначим через ε_t характер алгебры A, определенный с помощью равенства $\varepsilon_t(f) = f(t)$ при всех $f \in A$. Тогда отображение $t \mapsto \varepsilon_t$ является гомеоморфизмом $\dot{\Omega}$ на $\mathrm{X}'(A)$. Слабая топология и топология Джекобсона на $\mathrm{X}(A)$ совпадают.*

Ясно, что $t \mapsto \varepsilon_t$ — непрерывное инъективное отображение из $\dot{\Omega}$ в $\mathrm{X}'(A)$. Оно сюръективно и, стало быть, в силу следствия 1 и теоремы 2, является гомеоморфизмом. Если F — слабо замкнутая часть в $\mathrm{X}(A)$, то ей, в силу сказанного, соответствует замкнутая часть в Ω; следовательно, согласно предложению 1, она замкнута в топологии Джекобсона.

3. Преобразование Гельфанда

Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Напомним, что для каждого $x \in A$ через $\mathscr{G}_A x$ или $\mathscr{G}x$ обозначается функция $\chi \mapsto \chi(x)$ на $\mathrm{X}(A)$, что $\mathscr{G}x$ называется *преобразованием Гельфанда элемента* x и что отображение $x \mapsto \mathscr{G}x$

называется *преобразованием Гельфанда*. Следовательно, по определению имеет место равенство

$$(\mathcal{G}x)(\chi) = \chi(x).$$

Примеры. 1) В примере 1, § 2, п° 2, $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с Ω (следствие 2 предложения 1), и преобразование Гельфанда соответствует тождественному отображению.

2) Аналогично, в примере 2, § 2, п° 2, $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с $(0, 1)$, а $\mathcal{G}$ — с тождественным отображением (§ 7, п° 1, пример).

3) В примере 5, § 2, п° 2, $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с Δ, а $\mathcal{G}$ — с тождественным отображением (§ 7, упр. 6).

4) Рассмотрим, как и в примере 4, § 2, п° 2, банахову алгебру A абсолютно сходящихся рядов Фурье. Для каждого $u \in \mathbf{U}$ отображение $f \mapsto f(u)$ является характером χ_u алгебры A. Если $f_0 \in A$ — тождественное отображение $\mathbf{U}$, то $\chi_u(f_0) = u$; поэтому отображение $u \mapsto \chi_u$ из $\mathbf{U}$ на $\mathrm{X}(A)$ является инъективным (и, очевидно, непрерывным). Пусть $\chi \in \mathrm{X}(A)$. Так как $\|f_0\| = \|f_0^{-1}\| = 1$, то $|\chi(f_0)| \leqslant 1$ и $|\chi(f_0)^{-1}| \leqslant 1$; поэтому $\chi(f_0) \in \mathbf{U}$ и, значит, существует $u \in \mathbf{U}$, такое, что $\chi(f_0) = \chi_u(f_0)$. Так как $\{f_0, f_0^{-1}\}$ топологически порождают всю A, то $\chi = \chi_u$. Следовательно, отображение $u \mapsto \chi_u$ является гомеоморфизмом $\mathbf{U}$ на $\mathrm{X}(A)$ и можно отождествить эти два пространства. При этом $\mathcal{G}_A$ соответствует тождественному отображению. Значит, $\mathrm{X}(L^1(\mathbf{Z}))$ отождествляется с $\mathbf{U}$, и если $(c_n) \in L^1(\mathbf{Z})$, то $\mathcal{G}_{L^1(\mathbf{Z})}((c_n))$ отождествляется с функцией $e^{it} \mapsto \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ на $\mathbf{U}$.

5) Пусть Δ — круг $|z| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$, Γ — его граница, A — алгебра комплексных функций f на Γ, которые продолжаются как непрерывные функции в Δ, аналитические в $\mathring{\Delta}$, с нормой $\|f\| = \sup_{t \in \Gamma} |f(t)|$. Из принципа максимума следует, что алгебра A канонически изоморфна алгебре, рассмотренной в § 2, п° 2, пример 5. Поэтому $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с Δ, и если $f \in A$, то $\mathcal{G}f$ — непрерывное продолжение f в Δ, аналитическое в $\mathring{\Delta}$.

Предложение 2. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Функция $\mathcal{G}x$ непрерывна в каждой точке $x \in A$ и стремится к нулю на бесконечности в $\mathrm{X}(A)$.*

В § 1, п° 6 мы видели, что функция $\chi \mapsto \chi(x)$ непрерывна на $\mathrm{X}'(A)$ и равна нулю в точке 0. Так как $\mathrm{X}'(A)$ отождествляется с компактификацией Александрова пространства

$X(A)$, то для завершения доказательства остается воспользоваться следствием теоремы 1.

Предложение 3. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра и $x \in A$. Тогда*

(i) *Объединение множества значений $\mathcal{G}x$ и множества $\{0\}$ совпадает со $\mathrm{Sp}' x$.*

(ii) *Если A содержит единицу, то множество значений $\mathcal{G}x$ совпадает со $\mathrm{Sp}\, x$; в частности, для того, чтобы элемент x был обратим, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{G}x$ нигде не равнялось нулю.*

Предположим, что A содержит единицу. Уже доказано, что для каждого $\chi \in X(A)$ значение $\chi(x) \in \mathrm{Sp}\, x$. Обратно, пусть $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$. Тогда элемент $x - \lambda$ не обратим. Следовательно, он содержится в максимальном идеале алгебры A и, значит, существует $\chi \in X(A)$, такой, что $\chi(x - \lambda) = 0$ (теорема 2). Тем самым утверждение (ii) доказано.

Обратимся теперь к общему случаю. Множество $\mathrm{Sp}'_A x$ совпадает с множеством $\mathrm{Sp}_{\tilde{A}} x$ или, что то же самое, с множеством значений $\mathcal{G}_{\tilde{A}} x$ на $X(\tilde{A}) = X'(A)$, откуда следует (i).

Следствие. *Пусть $f(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ — абсолютно сходящийся ряд Фурье. Если f нигде не принимает значение 0, то f^{-1} представляется абсолютно сходящимся рядом Фурье.*

Это утверждение следует из приведенного выше примера 4 и предложения 3 (ii).

Предложение 4. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, B — алгебра непрерывных комплексных функций, стремящихся к 0 на бесконечности в $X(A)$, с нормой $\|f\| = \sup_{t \in X(A)} |f(t)|$. Тогда*

(i) *$\mathcal{G}$ является морфизмом из A в B, таким, что $\|\mathcal{G}x\| = \rho(x) \leqslant \|x\|$.*

(ii) *Для того чтобы преобразование $\mathcal{G}$ было изометрическим, необходимо и достаточно, чтобы $\|x^2\| = \|x\|^2$ для всех $x \in A$.*

В силу § 1, п° 6, преобразование $\mathcal{G}$ является морфизмом из A в B; $\|\mathcal{G}x\| = \rho(x)$ в силу предложения 3 и следствия 5 теоремы 1 § 2.

(ii) следует из (i) и § 2, п° 3.

Предложение 5. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Следующие четыре множества совпадают:*

1) *ядро преобразования Гельфанда;*

2) *множество элементов x, таких, что* $\mathrm{Sp}'\,x=\{0\}$;
3) *множество квазинильпотентных элементов в* A;
4) *радикал алгебры* A.

Пусть $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$, $\mathfrak{N}_4$ — эти множества. Имеем $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{N}_2$ (предложение 3 (i)) и $\mathfrak{N}_2=\mathfrak{N}_3$ (§ 2, следствие 5 теоремы 1). Множество $\mathfrak{N}_4$ является пересечением всех регулярных максимальных идеалов в A и, следовательно (теорема 2), пересечением ядер всех характеров в A; значит, $\mathfrak{N}_4=\mathfrak{N}_1$.

Следствие. *Пусть A — банахова алгебра, x и y — два коммутирующих элемента A. Тогда*

(i) *имеют место неравенства* $\rho(xy)\leqslant\rho(x)\rho(y)$, $\rho(x+y)\leqslant\rho(x)+\rho(y)$.

(ii) *Если элемент y квазинильпотентен, то* $\mathrm{Sp}'\,x=\mathrm{Sp}'(x+y)$; *если к тому же A содержит единицу, то* $\mathrm{Sp}\,x=\mathrm{Sp}(x+y)$.

Эти утверждения немедленно сводятся к случаю, когда алгебра A содержит единицу, а после рассмотрения замкнутой наполненной подалгебры в A, порожденной x и y, — к случаю, когда A коммутативна. Тогда (i) следует из предложения 3, а (ii) — из предложений 3 и 5.

Замечания. 1) Вообще говоря, $\mathscr{G}(A)$ не является ни замкнутым в B, ни всюду плотным в B (§ 7, упр. 7).

2) $\mathscr{G}(A)$ разделяет точки в $\mathrm{X}(A)$: если χ_1, χ_2 — две различные точки $\mathrm{X}(A)$, то существует элемент $x\in A$, такой, что $\chi_1(x)\neq\chi_2(x)$.

3) Если $\chi\in\mathrm{X}(A)$, то существует элемент из $\mathscr{G}(A)$, не обращающийся в нуль в точке χ.

4) Если A содержит единицу, то $\mathscr{G}(A)$ является наполненной подалгеброй алгебры непрерывных функций на $\mathrm{X}(A)$ (предложение 3 (ii)).

5) Мы увидим (§ 4, теорема 2), что $\mathscr{G}(A)$ инвариантно относительно действия голоморфных функций.

4. Морфизмы коммутативных банаховых алгебр

Предложение 6. *Пусть A и B — две коммутативные банаховы алгебры, h — морфизм их оснований. Тогда если B — алгебра без радикала, то морфизм h непрерывен.*

Пусть $(a,\ b)\in A\times B$ — точка замыкания графика G отображения h. Пусть $\chi\in\mathrm{X}'(B)$. Функция $(x,\ y)\mapsto\chi(h(x))-\chi(y)=(\mathrm{X}'(h)(\chi))(x)-\chi(y)$ непрерывна на $A\times B$ и обращается в нуль на G; следовательно, она равна нулю в точке $(a,\ b)$. Поэтому $\chi(h(a))=\chi(b)$ для всякого $\chi\in\mathrm{X}'(B)$. Так как B — алгебра без радикала, то $h(a)=b$. Таким

образом, график G замкнут и, значит, морфизм h непрерывен (*Топ. векг. пр.*, гл. I, § 1, след. 5, теор. 1).

Предположение о коммутативности A не является необходимым (упр. 11).

Следствие. *Любые две нормы на комплексной коммутативной алгебре без радикала, определяющие структуру банаховой алгебры, эквивалентны.*

Достаточно применить предложение 6 к тождественному отображению этой алгебры.

Пусть A и B — две коммутативные банаховы алгебры. Согласно § 1, n° 6, если h: $A \to B$ — сюръективный морфизм, то $X'(h)$ — гомеоморфизм $X'(B)$ на замкнутое подпространство в $X'(A)$, переводящий 0 в 0 (инъективным $X'(h)$ может быть при выполнении значительно более слабого предположения, см. § 7, предл. 1 (iv)).

Пусть теперь h: $A \to B$ — инъективный морфизм. Вообще говоря, $X'(h)$ не является сюръективным отображением; необходимое условие для того, чтобы отображение $X'(h)$ было сюръективным, получается из следующего предложения.

Предложение 7. *Пусть A и B — две коммутативные банаховы алгебры с единицей, h: $A \to B$ — морфизм алгебр с единицей (не обязательно непрерывный). Тогда если $X(h)$ — сюръективное отображение, то $h(A)$ — наполненная подалгебра в B.*

Пусть элемент $x \in A$ таков, что $h(x)$ обратим в B. Для всякого $\chi \in X(A)$ имеем $\chi = X(h)(\xi)$ и $\xi \in X(B)$. Поэтому $\chi(x) = \xi(h(x)) \neq 0$; следовательно, x обратим в A (предложение 3) и $h(x)$ обратим в $h(A)$.

Это необходимое условие сюръективности не является достаточным, даже в предположении, что h — изометрическое отображение (упр. 14). Однако справедливо следующее

Предложение 8. *Пусть A и B — две коммутативные банаховы алгебры с единицей, h: $A \to B$ — инъективный морфизм алгебр с единицей (не обязательно непрерывный), a — элемент из A. Предположим, что замкнутая наполненная подалгебра в A, порожденная элементом a, совпадает с A.*

Следующие условия эквивалентны:

a) $X(h)$ — *сюръективное отображение*;

b) $h(A)$ — *наполненная подалгебра в B*;

c) $\mathrm{Sp}_A a = \mathrm{Sp}_B h(a)$.

a) $\Rightarrow$ b) следует из предложения 7.

b) $\Rightarrow$ c) очевидно, так как $\mathrm{Sp}_A a = \mathrm{Sp}_{h(A)} h(a)$.

c) $\Rightarrow$ a) следует из § 1, n° 5, (4), и коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}(B) & \xrightarrow{\mathrm{X}(h)} & \mathrm{X}(A) \\ {\scriptstyle \mathscr{T}_B(h(a))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{T}_A(a)} \\ \mathrm{Sp}_B h(a) & \xrightarrow{i} & \mathrm{Sp}_A a \end{array}$$

где вертикальные стрелки обозначают сюръективные отображения (предл. 3), а i — каноническую инъекцию. Утверждение c) означает, что отображение i биективно. Из нашего предположения относительно элемента a следует, что отображение $\mathrm{X}(A) \to \mathrm{Sp}_A a$ биективно, так как множество точек в A, на котором совпадают два характера, является замкнутой наполненной подалгеброй в A. Поэтому $\mathrm{X}(h)$ — сюръективное отображение.

5. *Совместный спектр*

Пусть $B = \mathbf{C}[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ — алгебра с единицей комплексных многочленов от семейства переменных (X_λ). Для каждого $\chi \in \mathrm{X}(B)$ имеем $(\chi(X_\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \in \mathbf{C}^\Lambda$; ясно, что отображение $\chi \mapsto (\chi(X_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ является гомеоморфизмом пространства $\mathrm{X}(B)$ на произведение $\mathbf{C}^\Lambda$ пространств $\mathbf{C}$, так что можно отождествить эти два пространства.

Пусть, далее, A — коммутативная банахова алгебра с единицей, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторое семейство ее элементов. Тогда существует и притом единственный морфизм h: $B \to A$, такой, что $h(X_\lambda) = x_\lambda$ для каждого λ. Отображение $\mathrm{X}(h)$: $\chi \mapsto (\chi(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ является непрерывным отображением из $\mathrm{X}(A)$ в $\mathbf{C}^\Lambda$. Оно называется *отображением* $\mathrm{X}(A)$ *в* $\mathbf{C}^\Lambda$, *определенным семейством* (x_λ). Его образ является компактом в $\mathbf{C}^\Lambda$ и называется *совместным спектром* семейства (x_λ). Совместный спектр обозначается $\mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$ или $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$. Точка $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ из $\mathbf{C}^\Lambda$ принадлежит $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$ в том и только том случае, если все элементы $x_\lambda - c_\lambda$ находятся в некотором одиом и том же максимальном идеале алгебры A, другими словами, если порожденный ими идеал не совпадает с A. Если семейство (x_λ) сводится к единственному элементу x, то мы сиова получаем спектр $\mathrm{Sp}\, x$ (предл. 3 (ii)). Если $\Lambda' \subset \Lambda$, то $\mathrm{Sp}((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'})$ является образом $\mathrm{Sp}((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ при каноническом отображении $\mathbf{C}^\Lambda$ в $\mathbf{C}^{\Lambda'}$. В частности, $\mathrm{Sp}((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Sp}\, x_\lambda$.

Пусть z_λ $(\lambda \in \Lambda)$ — координатные функции на $\mathbf{C}^\Lambda$. Если $\chi \in \mathrm{X}(A)$, то значение $z_\lambda \circ \mathrm{X}(h)$ в точке χ есть $\chi(x_\lambda)$; следовательно, $z_\lambda \circ \mathrm{X}(h) = \mathscr{G} x_\lambda$.

Пусть A и B — две коммутативные банаховы алгебры с единицей, φ — морфизм алгебр с единицей из A в B, (x_λ) — семейство элементов из A. Для каждого $\chi \in \mathrm{X}(B)$ имеет место равенство

$$\chi(\varphi(x_\lambda)) = (\mathrm{X}(\varphi)(\chi))(x_\lambda),$$

поэтому $\mathrm{Sp}_B((\varphi(x_\lambda))) \subset \mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}(B) & \xrightarrow{\mathrm{X}(\varphi)} & \mathrm{X}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sp}_B((\varphi(x_\lambda))) & \xrightarrow{i} & \mathrm{Sp}_A((x_\lambda)) \end{array}$$

где i — каноническая инъекция, а вертикальные стрелки обозначают отображения, определенные семействами $(\varphi(x_\lambda))$ и (x_λ), коммутативна.

Предложение 9. (i) *Предположим, что наполненная подалгебра в A, порожденная семейством (x_λ), плотна в A. Тогда отображение $\mathrm{X}(A)$ в $\mathbf{C}^\Lambda$, определенное семейством (x_λ), является гомеоморфизмом $\mathrm{X}(A)$ на $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$.*

(ii) *Предположим, что подалгебра с единицей в A, порожденная семейством x_λ, плотна в A. Тогда для каждой точки $(c_\lambda) \in \mathbf{C}^\Lambda$ следующие условия эквивалентны:*

a) $(c_\lambda) \in \mathrm{Sp}((x_\lambda))$;

b) $|P((c_\lambda))| \leqslant \|P((x_\lambda))\|$ *для любого* $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$;

c) $|P((c_\lambda))| \leqslant \rho(P((x_\lambda)))$ *для любого* $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$.

(i) Пусть χ, $\chi' \in \mathrm{X}(A)$. Если $\chi(x_\lambda) = \chi'(x_\lambda)$ для всех λ, то χ и χ' совпадают на наполненной подалгебре в A, порожденной семейством x_λ, и в силу непрерывности χ и χ' — на самой алгебре A. Следовательно, $\mathrm{X}(h)$ является непрерывной биекцией $\mathrm{X}(A)$ на $\mathrm{Sp}((x_\lambda))$ и, стало быть, гомеоморфизмом, так как $\mathrm{X}(A)$ — компакт.

(ii) Если $(c_\lambda) \in \mathrm{Sp}((x_\lambda))$ и $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$, то существует характер $\chi \in \mathrm{X}(A)$, такой, что $c_\lambda = \chi(x_\lambda)$ для всех λ, откуда $|P((c_\lambda))| = |\chi(P((x_\lambda)))| \leqslant \rho(P((x_\lambda)))$; следовательно, a) $\Rightarrow$ c); c) $\Rightarrow$ b) очевидно, так как $\rho(x) \leqslant \|x\|$. Пусть теперь в точке $(c_\lambda) \in \mathbf{C}^\Lambda$ для всех $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$ имеет место неравенство $|P((c_\lambda))| \leqslant \|P((x_\lambda))\|$. Пусть A' — подалгебра с единицей в A, порожденная семейством (x_λ). Условие $P((x_\lambda)) = 0$ влечет за собой равенство $P((c_\lambda)) = 0$; следовательно, существует морфизм ξ: $A' \to \mathbf{C}$, такой, что $\xi(x_\lambda) = c_\lambda$ для всех λ. Так как

$$|P((c_\lambda))| \leqslant \|P((x_\lambda))\|,$$

то этот морфизм продолжается по непрерывности до характера χ алгебры $\overline{A'} = A$, откуда $(c_\lambda) = (\chi(x_\lambda)) \in \mathrm{Sp}((x_\lambda))$.

Следствие 1. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, (x_λ) — некоторое семейство ее элементов, A' — банахова подалгебра с единицей в A, порожденная семейством (x_λ). Тогда $\mathrm{Sp}_{A'}((x_\lambda))$ является полиномиально выпуклой оболочкой* (приложение) *множества $\mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$.*

Действительно, согласно предложению 9, $\mathrm{Sp}_{A'}((x_\lambda))$ представляет собой множество точек $(c_\lambda) \in \mathbf{C}^\Lambda$, таких, что $|P((c_\lambda))| \leqslant \rho(P((x_\lambda)))$ для всех $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$. Остается заметить, что

$$\rho(P((x_\lambda))) = \sup_{\chi \in \mathbf{X}(A)} |\chi(P((x_\lambda)))| = \sup_{\chi \in \mathbf{X}(A)} |P((\chi(x_\lambda)))| = \sup_{c \in \mathrm{Sp}_A((x_\lambda))} |P(c)|.$$

Следствие 2. *Пусть K — компакт в $\mathbf{C}$. Пусть K' — объединение компакта K и ограниченных связных компонент дополнения $\mathbf{C} - K$. Тогда K' является полиномиально выпуклой оболочкой K.*

Из сказанного в приложении следует, что K' содержится в этой полиномиально выпуклой оболочке. С другой стороны, множество $\mathbf{C} - K'$ является единственной неограниченной связной компонентой $\mathbf{C} - K$. Так как оно открыто и содержит внешность некоторого круга, то K' — компакт. Пусть $A = \mathscr{C}(K')$ — коммутативная банахова алгебра с единицей непрерывных комплексных функций на K' с равномерной нормой. Пусть $x \in A$ — функция $t \mapsto t$ на K'. Имеем $\mathrm{Sp}_A x = K'$; следовательно, множество $\mathbf{C} - \mathrm{Sp}_A x$ связно. Поэтому если через B обозначить замкнутую подалгебру с единицей в A, порожденную элементом x, то $\mathrm{Sp}_B x = \mathrm{Sp}_A x$ (§ 2, следствие предложения 6). Итак, в силу предложения 9 (ii), $\mathrm{Sp}_B x$ и, стало быть, K' является полиномиально выпуклым множеством.

Утверждение следствия 2 становится *неверным* при замене $\mathbf{C}$ на $\mathbf{C}^2$ (упр. 23).

Следствие 3. *Пусть K — полиномиально выпуклое подмножество в $\mathbf{C}^\Lambda$. Пусть $A = \mathscr{C}(K)$, A_1 — множество сужений на K многочленов на $\mathbf{C}^\Lambda$ и A' — замыкание A_1 в A. Пусть, далее, для каждого $z \in K$ отображение χ_z: $f \mapsto f(z)$ есть характер A'.*

(i) *Отображение ψ: $z \mapsto \chi_z$ является гомеоморфизмом K на $\mathbf{X}(A')$.*

(ii) *Пусть $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство сужений на K координатных функций на $\mathbf{C}^\Lambda$. Пусть φ — отображение $\mathbf{X}(A')$ в $\mathbf{C}^\Lambda$,*

определенное семейством (z_λ). *Тогда* $\varphi \circ \psi$ *является тождественным отображением* K *и* $K = \mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda))$.

Так как z_λ топологически порождают A', то φ является гомеоморфизмом пространства $\mathrm{X}(A')$ на $\mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda))$ (предл. 9(i)). Ясно, что $\varphi \circ \psi$ — тождественное отображение K, поэтому ψ инъективно (и, очевидно, непрерывно) и $\mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda)) \supset K$. В силу следствия 2 предложения 1, $\mathrm{Sp}_A((z_\lambda)) = K$. В силу следствия 1 предложения 9, $\mathrm{Sp}_{A'}((z_\lambda)) = K$, ибо множество K полиномиально выпукло. Таким образом, ψ является сюръективным отображением и, следовательно, гомеоморфизмом компакта K на $\mathrm{X}(A')$.

§ 4. Голоморфное функциональное исчисление

Всюду в этом параграфе символом A обозначается банахова алгебра с единицей.

1. *Формулировка основной теоремы*

Пусть E — комплексное банахово пространство и U — открытая часть в $\mathbf{C}^n$. Обозначим через $\mathcal{O}(U; E)$ комплексное векторное пространство функций, голоморфных в U, со значениями в E, снабженное топологией компактной сходимости. Пусть K — компакт в $\mathbf{C}^n$ и $\mathfrak{U}$ — убывающее фильтрующееся множество его открытых окрестностей. Если U, $U' \in \mathfrak{U}$ и $U' \subset U$, то имеется отображение сужения из $\mathcal{O}(U; E)$ в $\mathcal{O}(U'; E)$. Индуктивный предел пространств $\mathcal{O}(U; E)$ относительно этих отображений является локально выпуклым пространством и обозначается $\mathcal{O}(K; E)$; его элементы называются *ростками* функций, голоморфных в окрестности компакта K, со значениями в E; можно говорить о *значениях* такого ростка на K.

Ясно, что $\mathcal{O}(U; A)$, $\mathcal{O}(K; A)$ — алгебры с единицей и что можно, если $A \neq \{0\}$, канонически отождествить $\mathcal{O}(U; \mathbf{C})$ и $\mathcal{O}(K; \mathbf{C})$ с подалгебрами алгебр $\mathcal{O}(U; A)$ и $\mathcal{O}(K; A)$. Положим

$$\mathcal{O}(U; \mathbf{C}) = \mathcal{O}(U); \quad \mathcal{O}(K; \mathbf{C}) = \mathcal{O}(K).$$

Пусть M — некоторое множество. Если $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ и $m \leqslant n$, то положим $\pi_{m,n}(\mathbf{a}) = (a_1, \ldots, a_m)$. Если $a \in A^n$, то имеет место равенство

$$\pi_{m,n}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}) = \mathrm{Sp}\,(\pi_{m,n}(\mathbf{a})),$$

откуда возникает морфизм $\pi^*_{m,n}\colon \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,(\pi_{m,n}(\mathbf{a}))) \to \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,(\mathbf{a}))$.

Обозначим через $A^{(\infty)}$ сумму множеств A^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Теорема 1. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Тогда существует и притом единственное отображение $\mathbf{a} \mapsto \Theta_{\mathbf{a}}$, которое каждому $\mathbf{a} \in A^{(\infty)}$ ставит в соответствие непрерывный морфизм алгебр с единицей $\Theta_{\mathbf{a}}$: $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}) \to A$, обладающий следующими свойствами:*

(i) *Если $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и если $z_1, \ldots, z_n$ — ростки координатных функций на $\mathbf{C}^n$ в окрестности* Sp a, *то*

$$\Theta_{\mathbf{a}}(z_1) = a_1, \ \ldots, \ \Theta_{\mathbf{a}}(z_n) = a_n.$$

(ii) *Если $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $m \leqslant n$ и $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}(\pi_{m,n}(\mathbf{a})))$, то $\Theta_{\mathbf{a}}(\pi_{m,n}^{*}(f)) = \Theta_{\pi_{m,n}(\mathbf{a})}(f)$.*

Доказательству этой теоремы посвящены n° 2—6.

2. Построение некоторых дифференциальных форм

В этом пункте алгебра A предполагается коммутативной. Говоря о бесконечно дифференцируемых функциях на открытой части в $\mathbf{C}^n$, мы будем иметь в виду соответствующую вещественную структуру. Стандартные обозначения дифференциального исчисления мы используем относительно этой структуры. Под дифференциальными формами мы всегда будем подразумевать внешние дифференциальные формы, а умножение этих форм всегда будет внешним умножением.

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. Существуют бесконечно дифференцируемые отображения $v_1, \ldots, v_n$ из $\mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ в A, такие, что для всякого $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ имеет место равенство*

$$(z_1 - a_1)\, v_1(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n)\, v_n(\mathbf{z}) = 1.$$

1) Для каждой точки $\mathbf{z}_0 = (z_{01}, \ldots, z_{0n}) \in \mathbf{C}^n - \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ существуют функции $u_1, \ldots, u_n$ со значениями в A, определенные и бесконечно дифференцируемые в некоторой открытой окрестности точки $\mathbf{z}_0$ и такие, что в этой окрестности $(z_1 - a_1)u_1(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n)u_n(\mathbf{z}) = 1$. Действительно, заметим вначале, что существуют элементы $b_1, \ldots, b_n \in A$, такие, что $(z_{01} - a_1)\, b_1 + \ldots + (z_{0n} - a_n)\, b_n = 1$ (§ 3, n° 5). Элемент $(z_1 - a_1)\, b_1 + \ldots + (z_n - a_n)\, b_n$ обратим в A, если $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ принадлежит достаточно малой открытой окрестности точки $\mathbf{z}_0$, и теперь достаточно положить в этой окрестности

$$u_j(\mathbf{z}) = b_j \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - a_i)\, b_i \right)^{-1}.$$

2) Из предыдущего следует, что существует открытое покрытие $(V_\lambda)_{\lambda\in L}$ множества $\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a}$ и для каждого $\lambda\in L$ существуют функции $u_{1,\lambda}, \ldots, u_{n,\lambda}$ со значениями в A, определенные и бесконечно дифференцируемые в V_λ, такие, что $(z_1-a_1)u_{1\lambda}(\mathbf{z})+\ldots+(z_n-a_n)u_{n\lambda}(\mathbf{z})=1$ в V_λ. Согласно *Общ. топ.*, гл. I, 4-е изд., § 9, теор. 5, покрытие (V_λ) можно считать локально конечным. Далее, существует семейство $(f_\lambda)_{\lambda\in L}$ неотрицательных бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a}$, таких, что $\operatorname{supp}(f_\lambda)\subset V_\lambda$ и $\sum\limits_{\lambda\in L} f_\lambda = 1$ в $\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a}$ (*Var.*, R.). Продолжая функцию $f_\lambda u_{i\lambda}$ нулем в $(\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a}) - V_\lambda$, мы получим функцию (обозначим ее $u'_{i\lambda}$) со значениями в A, определенную и бесконечно дифференцируемую в $\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a}$. Так как для $i=1, 2, \ldots, n$ семейство $(\operatorname{supp}(u'_{i\lambda}))_{\lambda\in L}$ является локально конечным, то функция $v_i = \sum\limits_{\lambda\in L} u'_{i\lambda}$ бесконечно дифференцируема в $\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a}$. С другой стороны, пусть $\mathbf{z}\in\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a}$. Пусть L' — конечное подмножество индексов $\lambda\in L$, таких, что $\mathbf{z}\in V_\lambda$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n (z_i-a_i)v_i(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda\in L'}\sum_{i=1}^n (z_i-a_i)u'_{i\lambda}(\mathbf{z}) =$$

$$= \sum_{\lambda\in L'} f_\lambda(\mathbf{z})\sum_{i=1}^n (z_i-a_i)u_{i\lambda}(\mathbf{z}) = \Big(\sum_{\lambda\in L'} f_\lambda(\mathbf{z})\Big)\cdot 1 = 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{a}=(a_1, \ldots, a_n)\in A^n$ *и* h *— бесконечно дифференцируемое отображение* $\mathbf{C}^n$ *в* $\mathbf{C}$, *равное* 1 *в окрестности* $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$. *Тогда существуют бесконечно дифференцируемые отображения* $u_1, \ldots, u_n$ *из* $\mathbf{C}^n$ *в* A, *такие, что для каждой точки* $\mathbf{z}=(z_1, \ldots, z_n)\in\mathbf{C}^n$ *имеет место равенство*

$$(1)\qquad (z_1-a_1)u_1(\mathbf{z})+\ldots+(z_n-a_n)u_n(\mathbf{z}) = 1-h(\mathbf{z}).$$

Действительно, существуют отображения $v_1, \ldots, v_n$ из $\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a}$ в A со свойствами, указанными в лемме 1. Положим

$$u_i(\mathbf{z}) = (1-h(\mathbf{z}))v_i(\mathbf{z}), \quad \text{если} \quad \mathbf{z}\in\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a},$$

$$u_i(\mathbf{z}) = 0, \quad \text{если} \quad \mathbf{z}\in\operatorname{Sp}\mathbf{a}.$$

Тогда функции u_i бесконечно дифференцируемы в $\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a}$ и равны нулю в окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$, а следовательно, бесконечно дифференцируемы в $\mathbf{C}^n$. Равенство (1), очевидно, справедливо для $\mathbf{z}\in\mathbf{C}^n - \operatorname{Sp}\mathbf{a}$, а для $\mathbf{z}\in\operatorname{Sp}\mathbf{a}$ обе его части обращаются в нуль.

Замечание. Если $n=1$, то для $z\in \mathbf{C}-\mathrm{Spa}$ имеем

$$u_1(z)=(1-h(z))(z-a_1)^{-1}.$$

Лемма 3. *Пусть* a, h, $u_1, \ldots, u_n$ *обладают свойствами, указанными в лемме* 2. *Обозначим через* ω *дифференциальную форму* $du_1\,dz_1 \ldots du_n\,dz_n$ *степени* $2n$ *на* $\mathbf{C}^n$ *с коэффициентами в* A. *Тогда*

(i) *имеет место соотношение* $\operatorname{supp}\omega\subset\operatorname{supp}h$.

(ii) *Для* $i=1, 2, \ldots, n$ *существуют дифференциальные формы* β_i *на* $\mathbf{C}^n$ *степени* $n-1$ *с коэффициентами в* A, *такие, что*

$$(z_i-a_i)\,\omega = d(h\beta_i\,dz_1 \ldots dz_n).$$

(iii) *Существует дифференциальная форма* β *на* $\mathbf{C}^n$ *степени* $n-1$ *с коэффициентами в* A, *такая, что* $(n+1)\,h\omega-\omega = d(h\beta\,dz_1 \ldots dz_n)$.

Дифференцируя равенство (1), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} u_i\,dz_i + \sum_{i=1}^{n}(z_i-a_i)\,du_i = -\,dh, \tag{2}$$

откуда следует, что

$$dh\,dz_i\prod_{j\neq i}(du_j\,dz_j) = -\,(z_i-a_i)\,\omega. \tag{3}$$

Тогда $d\left(h\left(\prod_{j\neq i} du_j\right)\right)dz_1 \ldots dz_n = dh\left(\prod_{j\neq i} du_j\right)dz_1 \ldots dz_n = \pm(z_i-a_i)\,\omega$, и это равенство доказывает справедливость (ii). Из (ii) получается, что

$$(1-h)\,\omega = \sum_{i=1}^{n}(z_i-a_i)\,u_i\omega = \sum_{i=1}^{n} u_i d(h\beta_i\,dz_1 \ldots dz_n),$$

откуда $\operatorname{supp}(1-h)\,\omega\subset\operatorname{supp}h$, а это соотношение влечет за собой (i). Наконец, положим $\tau=\sum_{i=1}^{n} hu_i\,dz_i\left(\prod_{j\neq i}(du_j\,dz_j)\right)$. Тогда

$$d\tau = \sum_{i=1}^{n} u_i\,dh\,dz_i\left(\prod_{j\neq i}(du_j\,dz_j)\right) + nh\omega,$$

или, с учетом (3),

$$d\tau = -\sum_{i=1}^{n} u_i(z_i-a_i)\,\omega + nh\omega = -(1-h)\,\omega + nh\omega = (n+1)\,h\omega-\omega,$$

что и доказывает утверждение (iii).

Рассмотрим теперь, каким изменениям подвергается форма ω при некоторых модификациях $h, u_1, \ldots, u_n$ (а остается фиксированным). Начнем с одной простейшей модификации.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{a}, h, u_1, \ldots, u_n$ *обладают свойствами, указанными в лемме* 2. *Пусть* k — *бесконечно дифференцируемое отображение* $\mathbf{C}^n$ *в* A, i *и* j — *два целых числа из интервала* $[1, n]$. *Определим* $u_1', \ldots, u_n', \omega'$ *равенствами*

$$u_i' = u_i + (z_j - a_j)k, \quad u_j' = u_j - (z_i - a_i)k,$$
$$u_l' = u_l \quad \text{для} \quad l \neq i, j,$$
$$\omega' = du_1' dz_1 du_2' dz_2 \ldots du_n' dz_n.$$

Тогда имеет место равенство $(z_1 - a_1)u_1'(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n) \times \times u_n'(\mathbf{z}) = 1 - h(\mathbf{z})$, *и существует дифференциальная форма* ψ *степени* $n-1$ *на* $\mathbf{C}^n$ *с коэффициентами в* A, *такая, что* $\operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{supp} h$ *и* $\omega - \omega' = d(\psi\, dz_1 \ldots dz_n)$.

Действительно,

$$du_i' du_j' dz_1 \ldots dz_n =$$
$$= (du_i + k\, dz_j + (z_j - a_j)\, dk)(du_j - k\, dz_i - (z_i - a_i)\, dk)\, dz_1 \ldots dz_n =$$
$$= (du_i\, du_j - (z_i - a_i)\, du_i\, dk - (z_j - a_j)\, du_j\, dk)\, dz_1 \ldots dz_n.$$

Следовательно,

$$du_i' du_j' \Big(\prod_{l \neq i, j} du_l'\Big) dz_1 \ldots dz_n - du_i\, du_j \Big(\prod_{l \neq i, j} du_l\Big) dz_1 \ldots dz_n =$$
$$= -\Big(\sum_{l=1}^{n} (z_l - a_l)\, du_l\, dk\Big)\Big(\prod_{l \neq i, j} du_l\Big) dz_1 \ldots dz_n$$

и с учетом (2) это равенство можно продолжить:

$$dh\, dk \Big(\prod_{l \neq i, j} du_l\Big) dz_1 \ldots dz_n = d\Big(h\, dk \Big(\prod_{l \neq i, j} du_l\Big) dz_1 \ldots dz_n\Big).$$

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{a}, h, u_1, \ldots, u_n$ *обладают свойствами, указанными в лемме* 2. *Пусть* h' — *бесконечно дифференцируемое отображение* $\mathbf{C}^n$ *в* $\mathbf{C}$, *равное* 1 *в окрестности* $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$. *Пусть* $u_1', \ldots, u_n'$ — *бесконечно дифференцируемые отображения* $\mathbf{C}^n$ *в* A, *такие, что для всех* $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ *имеет место равенство*

$$(z_1 - a_1)u_1'(\mathbf{z}) + \ldots + (z_n - a_n)u_n'(\mathbf{z}) = 1 - h'(\mathbf{z}).$$

Пусть $\omega' = du_1' dz_1 \ldots du_n' dz_n$. *Тогда существует дифференциальная форма* ψ *степени* $n-1$ *на* $\mathbf{C}^n$ *с коэффициентами в* A, *такая, что* $\operatorname{supp}\psi \subset (\operatorname{supp} h) \cup (\operatorname{supp} h')$ *и* $\omega - \omega' = d(\psi\, dz_1 \ldots dz_n)$.

Для каждого $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ положим

$$\alpha_{ij}(\mathbf{z}) = u_i'(\mathbf{z})\, u_j(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z})\, u_j'(\mathbf{z}),$$

$$\beta_i(\mathbf{z}) = u_i'(\mathbf{z})\, h(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z})\, h'(\mathbf{z}),$$

так что $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$ и $\operatorname{supp} \beta_i \subset (\operatorname{supp} h) \cup (\operatorname{supp} h')$. Имеем

$$u_i'(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}) = u_i'(\mathbf{z}) \left(\sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j)\, u_j'(\mathbf{z}) + h(\mathbf{z}) \right) -$$

$$- u_i(\mathbf{z}) \left(\sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j)\, u_j'(\mathbf{z}) + h'(\mathbf{z}) \right) = \sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j)\, \alpha_{ij}(\mathbf{z}) + \beta_i(\mathbf{z}).$$

Положим $u_i''(\mathbf{z}) = u_i'(\mathbf{z}) - \beta_i(\mathbf{z})$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{u}'' = (u_1'', \ldots, u_n'')$. Тогда

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{u} + \sum_{i<j} \mathbf{v}_{ij},$$

где $\mathbf{v}_{ij}$ — отображения $\mathbf{C}^n$ в A^n, для которых i-я компонента равна $(z_j - a_j)\alpha_{ij}$, j-я компонента равна

$$(z_i - a_i)\alpha_{ji} = -(z_i - a_i)\alpha_{ij},$$

а все остальные компоненты равны нулю. В силу леммы 4, существует дифференциальная форма ψ_1 степени $n-1$ в $\mathbf{C}^n$ с коэффициентами в A, такая, что $\operatorname{supp} \psi_1 \subset \operatorname{supp} h$ и

$$\omega - du_1'' \, dz_1 \ldots du_n'' \, dz_n = d(\psi_1 \, dz_1 \ldots dz_n).$$

С другой стороны, дифференциальная форма

$$du_1'' \, dz_1 \ldots du_n'' \, dz_n - \omega' =$$

$$= d(u_1' - \beta_1)\, dz_1 \ldots d(u_n' - \beta_n)\, dz_n - du_1' \, dz_1 \ldots du_n' \, dz_n$$

представляется в виде суммы форм

$$\pm d\beta_{i_1} \ldots d\beta_{i_p} \, du_{j_1}' \ldots du_{j_{n-p}}' \, dz_1 \ldots dz_n, \quad p \geqslant 1,$$

откуда и следует утверждение леммы.

3. *Построение отображений* $\Theta_{\mathbf{a}}$

В этом пункте мы предполагаем, что алгебра A коммутативна.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, U — открытая окрестность $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$. Тогда существует бесконечно дифференцируемое отображение h из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}$, равное 1 в окрестности $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$ и такое, что $\operatorname{supp} h$ — компакт, содержащийся в U. Пусть, далее, $u_1, \ldots, u_n$ — отображения со свойствами, указанными в лемме 2.

Пусть

$$\omega = du_1\, dz_1 \ldots du_n\, dz_n.$$

Тогда $\operatorname{supp}\omega$ — компакт, содержащийся в U (лемма 3). Поэтому для каждой функции $f \in \mathcal{O}(U; A)$ можно образовать элемент вида $\int\limits_U f\omega$, принадлежащий A. В силу леммы 5 и формулы Стокса, этот элемент зависит только от $\mathbf{a}$ и f и не зависит от выбора h, $u_1, \ldots, u_n$. Положим

$$\Theta_{\mathbf{a}}^U(f) = n!\,(2\pi i)^{-n} \int\limits_U f\omega. \tag{4}$$

Тогда отображение $f \mapsto \Theta_{\mathbf{a}}^U(f)$ из $\mathcal{O}(U; A)$ в A является *линейным*. Это отображение, кроме того, непрерывно; действительно, используя введенные выше обозначения, мы видим, что существует постоянная $M \geqslant 0$, такая, что

$$\|\Theta_{\mathbf{a}}^U(f)\| \leqslant M \sup_{\mathbf{z} \in \operatorname{supp} h} \|f(\mathbf{z})\|.$$

С другой стороны, $\Theta_{\mathbf{a}}^U f$ зависит только от *ростка* функции f в окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$. В самом деле, пусть U, U' — открытые окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$ и $f \in \mathcal{O}(U; A)$, $f' \in \mathcal{O}(U'; A)$. Предположим, что f и f' совпадают в некоторой открытой окрестности $U'' \supset \operatorname{Sp}\mathbf{a}$; тогда существует бесконечно дифференцируемое отображение h из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}$, равное 1 в окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$ и такое, что $\operatorname{supp} h \subset U''$; построив ω при помощи h, мы видим, что $\int\limits_U f\omega = \int\limits_{U'} f'\omega$, и наше утверждение доказано.

Если $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp}\mathbf{a}; A)$, мы положим $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = \Theta_{\mathbf{a}}^U(f)$, где f — какой-нибудь представитель ростка $\tilde{f}$. Из предыдущих рассмотрений следует, что $\Theta_{\mathbf{a}}$ — *линейное непрерывное* отображение из $\mathcal{O}(\operatorname{Sp}\mathbf{a}; A)$ в A.

4. *Простейшие свойства отображений* $\Theta_{\mathbf{a}}$

Мы по-прежнему предполагаем, что алгебра A коммутативна.

Лемма 6. *Пусть* $\mathbf{a} \in A^n$, P *— многочлен на* $\mathbf{C}^n$ *с коэффициентами в* A, $\tilde{P}$ *— его росток в окрестности* $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$ *и*

$$\tilde{f} \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp}\mathbf{a}; A).$$

Тогда $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{P}\tilde{f}) = P(\mathbf{a})\,\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f})$.

Обозначим, как и раньше, через $z_1, \ldots, z_n$ координатные функции на $\mathbf{C}^n$; тогда достаточно доказать лемму для случая, когда $P = z_1^{e_1} \ldots z_n^{e_n}$, где $e_1, \ldots, e_n \in \mathbf{N}$. Индукция по $e_1 + \ldots + e_n$ позволяет ограничиться случаем, когда $P = z_i$. Пусть f — какой-нибудь представитель $\tilde{f}$, т. е. голоморфная функция в некоторой открытой окрестности $U \supset \mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. Пусть h — бесконечно дифференцируемое отображение из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}$, равное 1 в окрестности $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, с носителем, содержащимся в U. Используя обозначения $u_1, \ldots, u_n$, ω лемм 2 и 3, имеем

$$\Theta_{\mathbf{a}}^U(z_j f) = n!\,(2\pi i)^{-n} \int_U z_j f \omega,$$

$$a_j \Theta_{\mathbf{a}}^U(f) = n!\,(2\pi i)^{-n} \int_U a_j f \omega.$$

Используя дифференциальную форму β_i леммы 3 (ii), получим равенство

$$(z_i - a_i) f\omega = f d(h\beta_i\, dz_1 \ldots dz_n) = d(fh\beta_i\, dz_1 \ldots dz_n)$$

(так как $df\, dz_1 \ldots dz_n = 0$); следовательно, $\int_U (z_i - a_i) f\omega = 0$, что и доказывает лемму.

Напомним теперь следующие факты (*Var.*, R.).

1) Пусть V — открытая часть в $\mathbf{C}$, граница которой F — бесконечно дифференцируемое подмногообразие размерности 1 в $\mathbf{C}$. Следующие условия эквивалентны: (i) граница $\overline{V}$ совпадает с F; (ii) для каждой точки $z \in F$ существуют открытая окрестность U точки z в $\mathbf{C}$ и биективное отображение φ окрестности U на открытый единичный шар в $\mathbf{C}$, такое, что φ и φ^{-1} бесконечно дифференцируемы и справедливы соотношения

$$z \in U \cap V \Leftrightarrow \mathcal{J}\varphi(z) > 0,$$

$$z \in U \cap F \Leftrightarrow \mathcal{J}\varphi(z) = 0,$$

$$z \in U \cap (\mathbf{C} - \overline{V}) \Leftrightarrow \mathcal{J}\varphi(z) < 0.$$

2) Пусть K — компакт в $\mathbf{C}$. Существует фундаментальная система открытых относительно компактных окрестностей V компакта K, граница каждой из которых — бесконечно дифференцируемое подмногообразие размерности 1 в $\mathbf{C}$ — совпадает с границей $\overline{V}$.

3) Пусть W — относительно компактная открытая часть в $\mathbf{C}$, граница которой F — бесконечно дифференцируемое подмногообразие размерности 1 в $\mathbf{C}$ — совпадает с грани-

цей $\overline{W}$. Тогда существует и притом единственная ориентация на F, такая, что для любой дифференциальной формы τ степени 1, бесконечно дифференцируемой в некоторой открытой окрестности множества W, имеет место равенство $\int\limits_{\dot{W}} d\tau = \int\limits_{F} \tau$. Компактное многообразие F, снабженное этой ориентацией, называется ориентированным краем W и обозначается $\dot{W}$.

Вернемся к отображению Θ_a и рассмотрим сначала случай, когда $n = 1$.

Лемма 7. *Пусть x — элемент A, U — открытая окрестность* $\operatorname{Sp} x$ *и $f \in \mathcal{O}(U; A)$. Пусть V — открытая относительно компактная окрестность* $\operatorname{Sp} x$, *такая, что $\overline{V} \subset U$, причем граница V — бесконечно дифференцируемое подмногообразие размерности* 1 *в* $\mathbf{C}$ *и совпадает с границей $\overline{V}$. Тогда имеет место равенство*

$$\Theta_x^U(f) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\dot{V}} f(z)\,(z-x)^{-1}\,dz.$$

Если $U = \mathbf{C}$ и $f(z) = 1$, то $\Theta_x^U(f) = 1$.

Действительно, существует бесконечно дифференцируемое отображение $h\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, равное 1 в окрестности $\operatorname{Sp} x$ и имеющее компактный носитель, содержащийся в V. Далее, существует бесконечно дифференцируемое отображение $u\colon \mathbf{C} \to A$, такое, что $(z-x)u(z) = 1 - h(z)$ для всех $z \in \mathbf{C}$. Тогда $f\,du\,dz = d(fu\,dz)$ и $u(z) = (z-x)^{-1}$ на границе V. Поэтому

$$2i\pi\Theta_x^U(f) = \int\limits_{\dot{V}} f\,du\,dz = \int\limits_{\dot{V}} d(fu\,dz) = \int\limits_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-1}\,dz.$$

Предположим теперь, что $U = \mathbf{C}$ и $f(z) = 1$. Выберем в качестве окрестности V открытый шар с центром в 0 радиуса $R > \|x\|$ (так что $\operatorname{Sp} x \subset V$). Тогда в $\mathbf{C} - V$ имеет место равенство

$$(z-x)^{-1} = z^{-1}(1 - z^{-1}x)^{-1} = z^{-1}\cdot 1 + z^{-2}\cdot x + z^{-3}\cdot x^2 + \ldots.$$

Напомним (*Var.*, R.), что $\int\limits_{\dot{V}} z^n\,dz = 0$ для $n \neq -1$ и $\int\limits_{\dot{V}} z^{-1}\,dz = 2i\pi$. Следовательно, $\int\limits_{\dot{V}} (z-x)^{-1}\,dz = 2i\pi\cdot 1$,

Лемма 8. (i) *Для введенного в* n° 1 *морфизма* $\pi_{m,n}$ *имеет место равенство*

$$\Theta_{\mathbf{a}} \circ \pi^*_{m,n} = \Theta_{\pi_{m,n}(\mathbf{a})}.$$

(ii) *Если* $\tilde{1}$ *— росток функции* 1 *в окрестности* $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$, *то* $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{1}) = 1$.

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Достаточно доказать (i) для $m = n - 1$. Пусть $\mathbf{a}' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, U — некоторая открытая окрестность $\operatorname{Sp}\mathbf{a}'$ в $\mathbf{C}^{n-1}$ и $f' \in \mathcal{O}(U; A)$. Пусть f — отображение вида

$$f' \otimes 1\colon (\mathbf{z}', z_n) \longmapsto f'(\mathbf{z}')$$

из $U \times \mathbf{C}$ в A; ясно, что $f \in \mathcal{O}(U \times \mathbf{C}; A)$. Существует бесконечно дифференцируемое отображение h' (соответственно h'') из $\mathbf{C}^{n-1}$ в $\mathbf{C}$ (соответственно из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$), равное 1 в окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}'$ (соответственно $\operatorname{Sp} a_n$), с компактным носителем, содержащимся в U (соответственно в $\mathbf{C}$). Далее, существуют бесконечно дифференцируемые отображения $u_1, \ldots, u_{n-1}$ из $\mathbf{C}^{n-1}$ в A, такие, что

$$(z_1 - a_1)u_1(\mathbf{z}') + \ldots + (z_{n-1} - a_{n-1})u_{n-1}(\mathbf{z}') = 1 - h'(\mathbf{z}')$$

для всех $\mathbf{z}' \in \mathbf{C}^{n-1}$, и бесконечно дифференцируемое отображение u_n из $\mathbf{C}$ в A, такое, что $(z_n - a_n)u_n(z_n) = 1 - h''(z_n)$ для всех $z_n \in \mathbf{C}$. Тогда функция $h = h' \otimes h''$ на $\mathbf{C}^n$ бесконечно дифференцируема, равна 1 в окрестности $\operatorname{Sp}\mathbf{a}$ и имеет компактный носитель, содержащийся в $U \times \mathbf{C}$.

Для любого $\mathbf{z} = (\mathbf{z}', z_n) \in \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C}$ имеем

$$(z_1 - a_1)(u_1 \otimes 1)(\mathbf{z}) + \ldots + (z_{n-1} - a_{n-1})(u_{n-1} \otimes 1)(\mathbf{z}) +$$
$$+ (z_n - a_n)(h' \otimes u_n)(\mathbf{z}) = 1 - h'(\mathbf{z}') + h'(\mathbf{z}')(1 - h''(z_n)) = 1 - h(\mathbf{z}).$$

С другой стороны, выражение $du_1\,dz_1 \ldots du_{n-1}\,dz_{n-1}\,dh'$ является дифференциальной формой степени $2(n-1)+1$ на $\mathbf{C}^{n-1}$ и, следовательно, равно нулю; поэтому

$$d(u_1 \otimes 1)\,dz_1 d(u_2 \otimes 1)\,dz_2 \ldots d(u_{n-1} \otimes 1)\,dz_{n-1} d(h' \otimes u_n)\,dz_n =$$
$$= (h' \otimes 1)\,d(u_1 \otimes 1)\,dz_1 \ldots d(u_{n-1} \otimes 1)\,dz_{n-1} d(1 \otimes u_n)\,dz_n.$$

Из определения $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f})$ следует, что

$$\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = n!\,(2i\pi)^{-n} \int\limits_{U \times \mathbf{C}} (f' \otimes 1)(h' \otimes 1)\,d(u_1 \otimes 1)\,dz_1 \ldots$$
$$\ldots d(u_{n-1} \otimes 1)\,dz_{n-1} d(1 \otimes u_n)\,dz_n =$$
$$= n!\,(2i\pi)^{-n} \left(\int\limits_U f'h'\,du_1\,dz_1 \ldots du_{n-1}\,dz_{n-1} \right) \left(\int\limits_{\mathbf{C}} du_n\,dz_n \right).$$

Из леммы 7 следует, что $\int_C du_n dz_n = 2i\pi \cdot 1$. В силу леммы 3 (ii i)

$$n \int_U f' h' \, du_1 dz_1 \ldots du_{n-1} dz_{n-1} = \int_U f' \, du_1 dz_1 \ldots du_{n-1} dz_{n-1} = \\ = \frac{(2i\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \Theta_{a'}(\tilde{f}'),$$

следовательно,

$$\Theta_a(\tilde{f}) = n! \, (2i\pi)^{-n} \frac{(2i\pi)^{n-1}}{n!} \Theta_{a'}(\tilde{f}') \, 2i\pi = \Theta_{a'}(\tilde{f}').$$

Таким образом, (i) доказано, а (ii) следует из (i) и леммы 7.

Лемма 9. *Пусть* $\mathbf{a} \in A^n$. *Если* f — *многочлен на* $\mathbf{C}^n$ *с коэффициентами в* A, *то* $\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = f(\mathbf{a})$.

Это следует из лемм 6 и 8 (ii).

Лемма 9 (а также следствие предложения 1) оправдывает следующее обозначение. Если $\mathbf{a} \in A^n$, U — открытая окрестность $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$ и $f \in \mathcal{O}(U; A)$, то положим

$$f(\mathbf{a}) = \Theta_{\mathbf{a}}^U(f). \tag{5}$$

(Это обозначение согласовано с обозначением, введенным в *Алг.*, гл. IV, если f — многочлен.) Если $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} \mathbf{a}; A)$, то положим также

$$\tilde{f}(\mathbf{a}) = \Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}). \tag{6}$$

Предложение 1. *Пусть* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — *положительные числа*, Π — *полицилиндр в* $\mathbf{C}^n$, *определенный неравенствами* $|z_1| < \rho_1, \ldots, |z_n| < \rho_n$. *Пусть* $u = \sum c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$ — *степенной ряд с коэффициентами из* A, *сходящийся в* Π; *пусть* f — *голоморфная функция, являющаяся суммой этого ряда в* Π. *Пусть, далее, элемент* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ *таков, что* $\rho(a_1) < \rho_1, \ldots, \rho(a_n) < \rho_n$. *Тогда ряд, составленный из элементов* $c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} \in A$, *сходится абсолютно*, $\operatorname{Sp}(\mathbf{a}) \subset \Pi$ *и*

$$f(\mathbf{a}) = \sum c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Для каждого характера χ алгебры A справедливо неравенство $|\chi(a_i)| \leqslant \rho(a_i) < \rho_i$; следовательно, $\operatorname{Sp}(\mathbf{a}) \subset \Pi$. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — ограничения на Π координатных функций в $\mathbf{C}^n$. Тогда ряд из $\left(c_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}\right)$ сходится в $\mathcal{O}(\Pi; A)$ к функции f. Принимая во внимание лемму 9 и непрерывность ото-

бражения $f \mapsto \tilde{f}(\mathbf{a})$, мы приходим к выводу, что семейство $\left(c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}\right)$ суммируемо в A и его сумма равна $\tilde{f}(\mathbf{a})$. Наконец, пусть λ_i таковы, что $\rho(a_i) < \lambda_i < \rho_i$. Существует постоянная $k_i \geqslant 0$, такая, что $\|a_i^n\| \leqslant k_i \lambda_i^n$ для всех n, и так как $\sum \|c_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\| \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n} < +\infty$, то семейство $\left(c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}\right)$ абсолютно суммируемо.

Следствие. *Предположим, что* $A = \mathbf{C}$. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n$, *так что* $\operatorname{Sp} \mathbf{a} = \{\mathbf{a}\}$. *Пусть* $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\{\mathbf{a}\})$. *Тогда* $\tilde{f}(\mathbf{a})$ *в смысле равенства* (6) *совпадает со значением* $\tilde{f}$ *в* $\mathbf{a}$.

Предложение 2. *Пусть* B — *коммутативная банахова алгебра с единицей и* λ — *непрерывный морфизм алгебр с единицей из* A *в* B. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$, $b_i = \lambda(a_i)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ (*так что* $\operatorname{Sp} \mathbf{b} \subset \operatorname{Sp} \mathbf{a}$). *Пусть, далее,* U — *открытая окрестность* $\operatorname{Sp} \mathbf{a}$ *и* $f \in \mathcal{O}(U; A)$; *имеем* $\lambda \circ f \in \mathcal{O}(U; B)$. *Тогда* $\lambda(f(\mathbf{a})) = (\lambda \circ f)(\mathbf{b})$.

Пусть $h, u_1, \dots, u_n$ обладают по отношению к $\mathbf{a}$ свойствами, указанными в леммах 2 и 3. Для всех $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{n} (z_j - b_j) \lambda(u_j(\mathbf{z})) = \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} (z_j - a_j) u_j(\mathbf{z})\right) = 1 - h(\mathbf{z}).$$

Следовательно,

$$(\lambda \circ f)(\mathbf{b}) = n! (2i\pi)^{-n} \int_U \lambda(f(\mathbf{z})) \, d(\lambda \circ u_1) \, dz_1 \dots d(\lambda \circ u_n) \, dz_n =$$

$$= n! (2i\pi)^{-n} \lambda\left(\int_U f(\mathbf{z}) \, du_1 \, dz_1 \dots du_n \, dz_n\right) = \lambda(\tilde{f}(\mathbf{a})).$$

Следствие 1. *Пусть* $\chi \in \mathrm{X}(A)$ *и* $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$. *Тогда*

$$\chi(\tilde{f}(\mathbf{a})) = \tilde{f}(\chi(a_1), \dots, \chi(a_n)).$$

Это вытекает из предложения 2 и следствия предложения 1.

Замечание. Пусть $\mathbf{a} \in A^n$. Если A — алгебра без радикала, то отображение $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}(\mathbf{a})$ из $\mathcal{O}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$ в A является *единственным* отображением φ из $\mathcal{O}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$ в A, таким, что $\chi(\varphi(\tilde{f})) = \tilde{f}(\chi(a_1), \dots, \chi(a_n))$ для всех $\chi \in \mathrm{X}(A)$.

Следствие 2. *Если* $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$, *то* $\operatorname{Sp}(\tilde{f}(\mathbf{a})) = \tilde{f}(\operatorname{Sp} \mathbf{a})$.

Это вытекает из следствия 1 и определения совместного спектра.

Пример. Пусть $a(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ — сумма абсолютно сходящегося ряда Фурье (§ 2, n° 2). Пусть S — множество значений a. Пусть f — голоморфная (комплексная) функция в окрестности множества S. Тогда $f\circ a$ есть сумма абсолютно сходящегося ряда Фурье. Действительно, S является спектром элемента a в алгебре A абсолютно сходящихся рядов Фурье (§ 3, n° 3, пример 4), и поэтому достаточно применить следствие 1 в случае, когда $n=1$. Этот результат обобщает утверждение, содержащееся в следствии предложения 3, § 3.

5. *Два результата о плотности*

Предложение 3. *Пусть K — полиномиально выпуклый* (приложение) *компакт в $\mathbf{C}^n$ и P — множество ростков многочленов на $\mathbf{C}^n$ с коэффициентами из A в окрестности K. Тогда P плотно в $\mathcal{O}(K; A)$.*

Пусть U — открытая окрестность компакта K и $f\in\mathcal{O}(U; A)$. Существует (приложение, лемма 2) компактная окрестность $V\supset K$, которая полиномиально выпукла и содержится в U. Пусть P' (соответственно P'_0) — множество сужений на V многочленов на $\mathbf{C}^n$ с коэффициентами в A (соответственно в $\mathbf{C}$). Пусть B (соответственно B_0) — банахова алгебра, полученная в результате замыкания множества P' (соответственно P'_0) в $\mathscr{C}(V; A)$. Для доказательства утверждения достаточно проверить, что $f|V\in B$. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — сужения на V координатных функций в $\mathbf{C}^n$; они принадлежат B_0 и $\mathrm{Sp}_{B_0}(z_1, \ldots, z_n)=V$ в силу следствия 3 предложения 9 § 3. Так как A можно отождествить с нормированной подалгеброй в P' и, стало быть, в B, то f определяет некоторый элемент f_B в $\mathcal{O}(U; B)$; поскольку $\mathrm{Sp}_B(z_1, \ldots, z_n)\subset \mathrm{Sp}_{B_0}(z_1, \ldots, z_n)\subset U$, можно образовать элемент $b=f_B(z_1, \ldots, z_n)$ в B. Пусть $\zeta=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\in V$ и λ — морфизм $g\mapsto g(\zeta)$ из B в A. Тогда $\lambda\circ f_B=f$. Из предложения 2 следует, что $b(\zeta)=f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Значит, $f|V=b\in B$.

Для $n=1$ имеет место также следующее

Предложение 4. *Пусть K — компакт в $\mathbf{C}$ и Q — множество ростков голоморфных рациональных функций в окрестности компакта K. Тогда Q плотно в $\mathcal{O}(K)$.*

Пусть f — голоморфная функция в открытой окрестности U компакта K. Существует компактная окрестность $V\supset K$, содержащаяся в U. Пусть Q' — множество сужений на V рациональных функций на $\mathbf{C}$, непрерывных на V, а C — замыкание Q' в $\mathscr{C}(V)$. Пусть, далее, z — тождественное ото-

бражение окрестности V. Тогда $\dot{C}$ — замкнутая наполненная подалгебра в $\mathscr{C}(V)$, порожденная z. Имеет место равенство $\mathrm{Sp}_C z = \mathrm{Sp}_{\mathscr{C}(V)} z = V$. Поэтому можно образовать элемент $f(z)$ в C. Согласно следствию 1 предложения 2, этот элемент в C совпадает с $f|V$. Значит, $f|V$ является равномерным пределом элементов из Q', и доказательство завершено.

6. *Доказательство теоремы 1*

По-прежнему алгебра A предполагается коммутативной.

Лемма 10. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ *и* $U \subset \mathbf{C}^n$ — *открытая окрестность* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. *Тогда в* A *существуют элементы* $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$, *такие, что проекция на* $\mathbf{C}^n$ *полиномиально выпуклой оболочки* $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$ (*которая представляет собой часть в* $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^p$) *есть некоторая часть* U.

Пусть $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство элементов из A, содержащее семейство $(a_1, \ldots, a_n)$ и топологически порождающее A. Пусть π — каноническая проекция $\mathbf{C}^\Lambda$ на $\mathbf{C}^n$, и пусть $U' = \pi^{-1}(U)$. Тогда U' — окрестность $\mathrm{Sp}((a_\lambda))$ и $\mathrm{Sp}((a_\lambda))$ — полиномиально выпуклое множество (§ 3, предложение 9). В силу леммы 1 приложения существует конечное подмножество Λ_0 в Λ, содержащее $\{1, \ldots, n\}$ и такое, что $\mathrm{pr}_{\Lambda_0}(U')$ содержит полиномиальио выпуклую оболочку S множества $\mathrm{pr}_{\Lambda_0}(\mathrm{Sp}((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})) = \mathrm{Sp}((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0})$. Следовательно, проекция S на $\mathbf{C}^n$ есть часть U.

Утверждение теоремы 1, касающееся существования, будет установлено, когда мы докажем следующее

Предложение 5. *Пусть* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. *Отображение* $f \mapsto \tilde{f}(\mathbf{a})$ *из* $\mathscr{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}; A)$ *в* A *является непрерывным морфизмом алгебр с единицей, который преобразует ростки координатных функций на* $\mathbf{C}^n$ *в окрестности* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ *в* $a_1, \ldots, a_n$.

С учетом леммы 9 достаточно доказать, что если U — открытая окрестность $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ и $f \in \mathscr{O}(U; A)$, $g \in \mathscr{O}(U; A)$, то

$$(fg)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})\, g(\mathbf{a}). \tag{7}$$

Пусть $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$ выбраны в соответствии с леммой 10. Пусть π — каноническая проекция $U \times \mathbf{C}^p$ на U. Тогда функции $f \circ \pi$, $g \circ \pi$, $(fg) \circ \pi$ голоморфны в области $U \times \mathbf{C}^p$, содержащей полиномиально выпуклую оболочку K совместного спектра $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$.

В силу предложения 3, существуют последовательности $(P_1, P_2, \ldots)$, $(Q_1, Q_2, \ldots)$ многочленов на $\mathbf{C}^{n+p}$ с коэффи-

циентами из A, такие, что ростки многочленов P_1, P_2, ... (соответственно Q_1, Q_2, ...) в окрестности компакта K стремятся к ростку функции $f \circ \pi$ (соответственно $g \circ \pi$) в окрестности K. Поэтому ростки P_1Q_1, P_2Q_2, ... в окрестности K стремятся к ростку функции $(fg) \circ \pi$ в окрестности K. Из леммы 9 следует, что

$$(P_iQ_i)(a_1, \ldots, a_{n+p}) = P_i(a_1, \ldots, a_{n+p})\, Q_i(a_1, \ldots, a_{n+p}),$$

откуда в пределе получаем

$$(fg \circ \pi)(a_1, \ldots, a_{n+p}) = (f \circ \pi)(a_1, \ldots, a_{n+p})\,(g \circ \pi)(a_1, \ldots, a_{n+p}).$$

В силу леммы 8 (i) отсюда получается равенство (7).

Окончание доказательства теоремы 1.

Пусть $(\Theta_a)_{a \in A(\infty)}$, $(\Theta'_a)_{a \in A(\infty)}$ — два семейства морфизмов со свойствами, указанными в формулировке теоремы 1. Нам надлежит доказать, что они совпадают. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и U — открытая окрестность $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. Пусть $f \in \mathcal{O}(U)$. Мы знаем, что в A существуют элементы $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$, такие, что $\pi(L) \subset U$, где π — каноническая проекция $\mathbf{C}^{n+p}$ на $\mathbf{C}^n$, а L — полиномиально выпуклая оболочка спектра $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$. Положим $g = f \circ \pi$; пусть $\tilde{f}$ (соответственно $\tilde{g}$) — росток функции f (соответственно g) в окрестности $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ (соответственно $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$); по предположению

$$\Theta_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = \Theta_{(a_1, \ldots, a_{n+p})}(\tilde{g}), \qquad \Theta'_{\mathbf{a}}(\tilde{f}) = \Theta'_{(a_1, \ldots, a_{n+p})}(\tilde{g}).$$

Но так как $\Theta_{(a_1, \ldots, a_{n+p})}$ и $\Theta'_{(a_1, \ldots, a_{n+p})}$ совпадают на множестве ростков многочленов $n+p$ переменных в окрестности $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_{n+p})$, то они совпадают и в точке $\tilde{g}$, поскольку росток g в окрестности множества L является пределом ростков многочленов (предл. 3).

Заметим, что предложение 3 немедленно приводит также и к следующей теореме единственности.

Предложение 6. *Пусть* $\mathbf{a} \in A^n$. *Предположим, что* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ *является полиномиально выпуклым. Пусть* $z_1, \ldots, z_n$ *— ростки координатных функций на* $\mathbf{C}^n$ *в окрестности* $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$. *Тогда отображение* $\tilde{f} \mapsto \tilde{f}(\mathbf{a})$ *является единственным непрерывным морфизмом* φ *алгебр с единицей из* $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a})$ *в* A, *таким, что* $\varphi(z_1) = a_1, \ldots, \varphi(z_n) = a_n$.

7. Суперпозиция в функциональном исчислении

Теорема 2. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, $\mathbf{a}=(a_1, \ldots, a_n)\in A^n$ и $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p$ — элементы из $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a})$; пусть, далее, $\tilde{\mathbf{f}}=(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_p)$. Положим $b_i=\tilde{f}_i(a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b}=(b_1, \ldots, b_p)$. Тогда $\mathrm{Sp}\,\mathbf{b}$ является образом $\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$ при отображении*

$$(z_1, \ldots, z_n)\mapsto(\tilde{f}_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \tilde{f}_p(z_1, \ldots, z_n)).$$

Пусть $\tilde{g}\in\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{b}; A)$. Росток суперпозиции $\tilde{h}=\tilde{g}\circ\tilde{\mathbf{f}}$ является элементом множества $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}; A)$. Тогда

$$\tilde{g}(\mathbf{b})=\tilde{h}(\mathbf{a}).$$

1) Пусть K — полиномиально выпуклая оболочка спектра $\mathrm{Sp}\,\mathbf{b}$. Согласно предложению 5, отображение $\tilde{g}\mapsto(\tilde{g}\circ\tilde{\mathbf{f}})(\mathbf{a})$ является непрерывным морфизмом алгебр с единицей из $\mathcal{O}(K; A)$ в A, который преобразует q-ю координатную функцию в $\tilde{f}_q(a_1, \ldots, a_n)=b_q$. Равенство $\tilde{g}(\mathbf{b})=(\tilde{g}\circ\tilde{\mathbf{f}})(\mathbf{a})$ выполняется, следовательно, в случае, когда g — многочлен, и, значит, в силу предложения 3, для всех $\tilde{g}\in\mathcal{O}(K; A)$.

2) Пусть теперь g — голоморфная функция в открытой окрестности $\Omega\supset\mathrm{Sp}\,\mathbf{b}$. Существуют элементы $b_{p+1}, \ldots, b_{p+q}\in A$, обладающие следующими свойствами: если L — полиномиально выпуклая оболочка спектра

$$\mathrm{Sp}(b_1, \ldots, b_{p+q})\subset\mathbf{C}^{p+q}$$

и π — каноническая проекция $\mathbf{C}^{p+q}$ на $\mathbf{C}^p$, то $\pi(L)\subset\Omega$ (лемма 10). Пусть $f_1, \ldots, f_p$ — голоморфные функции в открытой окрестности $U\supset\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}$, такие, что $(f_1, \ldots, f_p)(U)\subset\Omega$. Тогда функция $g\circ\pi$ голоморфна в области $\pi^{-1}(\Omega)$, которая является окрестностью L. Пусть π' — каноническая проекция $\mathbf{C}^{n+q}$ на $\mathbf{C}^n$. Обозначая q последних координатных функций на $\mathbf{C}^{n+q}$ через $z_{n+1}, \ldots, z_{n+q}$, имеем

$$(g\circ\pi)\circ(f_1\circ\pi', \ldots, f_p\circ\pi', z_{n+1}, \ldots, z_{n+q})=$$
$$=g\circ(f_1\circ\pi', \ldots, f_p\circ\pi')=h\circ\pi'.$$

Эта формула и первая часть доказательства приводят к следующему равенству:

$$(g\circ\pi)((f_1\circ\pi')(c), \ldots, z_{n+1}(c), \ldots)=(h\circ\pi')(c),$$

где $c=(a_1, \ldots, a_n, b_{p+1}, \ldots, b_{p+q})$, или, если принять во внимание лемму 8, к равенству

$$g(f_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, f_p(a_1, \ldots, a_n)) = h(a_1, \ldots, a_n).$$

Теорема доказана.

8. Случай одной переменной

Теорема 3. *Пусть A — банахова алгебра с единицей (не обязательно коммутативная), x — элемент A, z — росток тождественной функции в окрестности $\mathrm{Sp}\, x$. Тогда существует и притом единственный непрерывный морфизм φ алгебр с единицей из $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A x)$ в A, такой, что $\varphi(z)=x$.*

Пусть B — замкнутая наполненная подалгебра в A, порожденная элементом x. Она, очевидно, коммутативна и $\mathrm{Sp}_B x = \mathrm{Sp}_A x$ (§ 1, n° 4). Если $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A x)$, то можно образовать элемент $f(x)$ в B, а тогда отображение $f \mapsto f(x)$ окажется непрерывным морфизмом φ алгебр с единицей из $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A x)$ в B (следовательно, в A), таким, что $\varphi(z)=x$.

Пусть φ, φ' — два непрерывных морфизма алгебр с единицей из $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A x)$ в A, таких, что $\varphi(z)=\varphi'(z)=x$. Тогда φ и φ' совпадают на множестве ростков многочленов в окрестности $\mathrm{Sp}_A x$ и, следовательно, на множестве ростков голоморфных рациональных функций в окрестности $\mathrm{Sp}_A x$. Но эти ростки образуют всюду плотное множество в $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A x)$ и, значит, $\varphi=\varphi'$.

Определение 1. *Если $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A x)$, то элемент $\varphi(f)$, указанный в теореме 3, обозначается через $f(x)$.*

Замечание. Если алгебра A коммутативна, то это определение совпадает, в силу теоремы 1, с определением n° 4. В общем случае, как видно из доказательства теоремы 3, $f(x)$ принадлежит замкнутой наполненной подалгебре B в A, порожденной элементом x, которая коммутативна; элемент $f(x)$ в A (в смысле определения 1) совпадает с элементом $f(x)$ в B (в смысле n° 4).

Предложение 7. *Пусть A и A' — банаховы алгебры с единицей, λ — непрерывный морфизм алгебр с единицей из A в A'. Пусть $x \in A$ и $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A x)$. Тогда $\lambda(f(x)) = f(\lambda(x))$.*

Это вытекает из предложения 2 и приведенного выше замечания.

Предложение 8. *Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$, $f \in \mathcal{O}(\mathrm{Sp}\, x)$ и $y=f(x)$. Образом $\mathrm{Sp}\, x$ при отображе-*

нии f является $\operatorname{Sp} y$. *Пусть* $g \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} y)$, *так что* $h = g \circ f \in \mathcal{O}(\operatorname{Sp} x)$. *Тогда* $g(y) = h(x)$.

Это также вытекает из теоремы 2 и приведенного выше замечания.

Предложение 9. *Пусть* A — *банахова алгебра с единицей,* $x \in A$, U — *открытая окрестность* $\operatorname{Sp} x$ *и* $f \in \mathcal{O}(U)$. *Пусть* V — *открытая относительно компактная окрестность* $\operatorname{Sp} x$, *такая, что* $\bar{V} \subset U$. *Предположим, далее, что граница* V *является подмногообразием размерности* 1 *в* $\mathbf{R}^2$, *совпадающим с границей* $\bar{V}$. *Пусть, наконец,* $\dot{V}$ — *ориентированный край* V (n° 4). *Тогда для* $n = 0, 1, \ldots$ *имеет место равенство*

$$\frac{d^n f}{dz^n}(x) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-n-1} dz. \tag{8}$$

Для $n = 0$ это равенство вытекает из леммы 7 и приведенного выше замечания. Допустим теперь, что предложение справедливо для некоторого целого n. Если $z \notin \operatorname{Sp} x$, то, согласно теореме 1 (iii), § 2, имеем

$$\frac{d}{dz}\left((z-x)^{-n-1} f(z)\right) = (z-x)^{-n-1} \frac{df}{dz} - (n+1)(z-x)^{-n-2} f(z). \tag{9}$$

Применяя формулу Стокса к компактному многообразию $\dot{V}$, получим

$$\int_{\dot{V}} \frac{d}{dz}\left((z-x)^{-n-1} f(z)\right) dz = \int_{\dot{V}} d\left((z-x)^{-n-1} f(z)\right) = 0. \tag{10}$$

Равенства (9) и (10) влекут за собой равенство

$$\int_{\dot{V}} f'(z)(z-x)^{-n-1} dz = (n+1) \int_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-n-2} dz,$$

откуда, по предположению индукции (примененному к df/dz), следует, что

$$\frac{2i\pi}{n!} \frac{d^{n+1} f}{dz^{n+1}}(x) = (n+1) \int_{\dot{V}} f(z)(z-x)^{-n-2} dz,$$

и предложение доказано для $n+1$.

Предложение 10. *Пусть* A — *банахова алгебра с единицей,* U — *открытая часть в* $\mathbf{C}$.

(i) *Множество* Ω *элементов* $x \in A$, *таких, что* $\operatorname{Sp} x \subset U$, *открыто в* A.

(ii) *Пусть* $f \in \mathcal{O}(U)$. *Отображение* $x \mapsto f(x)$ *из* Ω *в* A *является аналитическим* (*Var.*, R.) *и, в частности, непрерывным.*

Пусть $x \in \Omega$. Существует окрестность $V \supset \operatorname{Sp} x$ в $\mathbf{C}$, такая, что $\bar{V} \subset U$ и граница V является бесконечно дифференцируемым подмногообразием размерности 1 в $\mathbf{C}$, совпадающим с границей $\bar{V}$. Пусть l — длина $\dot{V}$, m — верхняя грань $|f(\lambda)|$ на $\dot{V}$ и M — верхняя грань $\|(\lambda - x)^{-1}\|$ на $\mathbf{C} - V$. Если $z \in A$ и $\|z\| \cdot M \leqslant 1/2$ и если $\lambda \in \mathbf{C} - V$, то

$$\lambda - x - z = (1 - z(\lambda - x)^{-1})(\lambda - x)$$

и $\|z(\lambda - x)^{-1}\| \leqslant 1/2$; следовательно, элемент $\lambda - x - z$ обратим и

$$(\lambda - x - z)^{-1} = (\lambda - x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (z(\lambda - x)^{-1})^n,$$

причем $\|(z(\lambda - x)^{-1})^n\| \leqslant 2^{-n}$. Тем самым доказано, что множество Ω открыто и, кроме того, что

$$2i\pi f(x + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\dot{V}} f(\lambda)(\lambda - x)^{-1}(z(\lambda - x)^{-1})^n \, d\lambda.$$

Но выражение $\int_{\dot{V}} f(\lambda)(\lambda - x)^{-1}(z(\lambda - x)^{-1})^n \, d\lambda$ является однородным многочленом степени n по z (следовательно, аналитически зависит от z), с нормой, не превосходящей $mlM \cdot 2^{-n}$. Это доказывает аналитичность в Ω отображения $y \mapsto f(y)$.

Предложение 11. *Пусть* A — *банахова алгебра с единицей,* $x \in A$, U — *открытая окрестность* $\operatorname{Sp} x$, $f \in \mathcal{O}(U)$, δ — *расстояние между* $\operatorname{Sp} x$ *и* $\mathbf{C} - U$.

(i) *Для каждого* δ', *такого, что* $0 < \delta' < \delta$, *существует постоянная* $k \geqslant 0$, *такая, что* $\|f^{(n)}(x)\| \leqslant k\delta'^{-n} n!$ *для* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(ii) *Если элемент* $y \in A$ *перестановочен с* x *и если* $\rho(y) < \delta$, *то* $\operatorname{Sp}(x + y) \subset U$ *и*

$$f(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} f^{(n)}(x),$$

причем ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Заменяя алгебру A ее замкнутой наполненной подалгеброй, порожденной элементами x и y (при этом не меняются

$\mathrm{Sp}\,x$ и $\mathrm{Sp}(x+y)$), мы сведем задачу к случаю, когда A — коммутативная алгебра.

Пусть $\delta' \in]0, \delta[$, $\varepsilon = \delta - \delta' > 0$ и K — компактная окрестность $\mathrm{Sp}\,x$, состоящая из таких точек в $\mathbf{C}$, расстояние которых до $\mathrm{Sp}\,x$ не превосходит $\varepsilon/2$. Так как функция f голоморфна во всяком открытом круге радиуса $\delta' + \varepsilon/2$ с центром, принадлежащим K, то, в силу неравенства Коши, существует постоянная $l \geqslant 0$, такая, что

$$\sup_{z \in K} \frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leqslant l\delta'^{-n}$$

для $n = 0, 1, \ldots$. Поэтому (i) вытекает из леммы 7.

Если $\rho(y) < \delta$, то можно выбрать δ', такое, что $\rho(y) < \delta' < \delta$. Пусть V — множество точек $\mathbf{C}$, расстояние которых от $\mathrm{Sp}\,x$ не превосходит $\delta - \delta'$, и V' — открытый шар с центром в 0 радиуса δ' в $\mathbf{C}$. Пусть g — отображение $(z, z') \mapsto z + z'$ из $V \times V'$ в U. Тогда $h = f \circ g$ является отображением $(z, z') \mapsto f(z + z')$ из $V \times V'$ в $\mathbf{C}$. Так как $\mathrm{Sp}(x, y) \subset V \times V'$, то $\mathrm{Sp}(x+y) \subset U$. В силу теоремы 2, имеем $h(x, y) = f(x + y)$. Но функция h в $\mathcal{O}(V \times V')$ является суммой ряда

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} z'^n.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} y^n$$

сходится, и его сумма равна $h(x, y) = f(x + y)$. Кроме того, согласно (i), этот ряд сходится абсолютно.

9. Экспонента и логарифм

Пусть A — банахова алгебра с единицей, и пусть $x \in A$. Рассмотрим функцию $f(z) = \exp z$; из предложения 1 следует, что

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. \tag{11}$$

Так как $\| x^n \| \leqslant \| x \|^n$, то

$$\| \exp x \| \leqslant \exp \| x \|,$$

и ряд (11) сходится равномерно в каждом шаре в A. Поэтому отображение $x \mapsto \exp x$ из A в A является непрерыв-

ным (см. также предложение 10). Если элемент $y \in A$ коммутирует с x, то, как следует из предложения 11,

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \exp x,$$

откуда

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y. \tag{12}$$

В частности, элемент $\exp x$ обратим и

$$(\exp x)^{-1} = \exp(-x). \tag{13}$$

Пусть Δ — множество всех $z \in \mathbf{C}$, таких, что $-\pi < \Im z < \pi$. Пусть Δ' — множество всех $z \in \mathbf{C}$, не принадлежащих отрицательному лучу (включая точку 0) вещественной оси. Тогда отображение $\exp|\Delta$ является биекцией из Δ на Δ' (*Функ. действ. пер.*, гл. III, § 1, n° 7); обратная биекция будет обозначаться log. Если $x \in A$ и $\mathrm{Sp}\, x \subset \Delta'$, то можно образовать элемент $\log x$ в A; имеем $\mathrm{Sp}(\log x) \subset \Delta$ и в силу предложения 8

$$\exp(\log x) = x. \tag{14}$$

С другой стороны, если $y \in A$ и $\mathrm{Sp}\, y \subset \Delta$, то $\mathrm{Sp}(\exp y) \subset \Delta'$ и в силу предложения 8

$$\log(\exp y) = y. \tag{15}$$

В частности, если $u \in A$ и $\rho(u) < 1$, то $\mathrm{Sp}(1-u) \subset \Delta'$ и можно образовать $\log(1-u)$. Так как

$$\log(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

для $|z| < 1$, то, как следует из предложения 1 и теоремы 2,

$$\log(1-u) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n}. \tag{16}$$

Пусть G — группа обратимых элементов алгебры A. Если алгебра A *коммутативна*, то, как показывают формулы (12) и (13), $\exp(A)$ является подгруппой в G. Эта подгруппа содержит, в силу (14), открытый шар с центром в 1 радиуса 1 и, следовательно, является открытой (и, стало быть, замкнутой) подгруппой группы G. Кроме того, $\exp(A)$ является связной подгруппой, как непрерывный образ алгебры A, которая связна. Следовательно, $\exp(A)$ есть связная компонента единицы группы G.

10. Разбиения пространства характеров

Предложение 12. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Предположим, что пространство $\mathrm{X}(A)$ допускает разбиение на два открытых множества U_1 и U_2. Тогда существует и притом единственный идемпотент j в A, такой, что $\mathcal{G}j$ равно 1 на U_1 и 0 на U_2.*

Пространство $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с некоторой частью в $\mathbf{C}^A$ при отображении $\chi \mapsto (\chi(a))_{a \in A}$. Части U_1 и U_2 равномерного пространства $\mathbf{C}^A$ являются непересекающимися компактами; следовательно, существуют конечная часть $M \subset A$ и непересекающиеся открытые подмножества V_1, V_2 в $\mathbf{C}^M$, такие, что

$$p(U_1) \subset V_1, \quad p(U_2) \subset V_2;$$

через p обозначается каноническая проекция нз $\mathbf{C}^A$ на $\mathbf{C}^M$. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — различные элементы в M и $\mathbf{C}^M$ отождествлено с $\mathbf{C}^n$. Пусть функция f равна 1 на V_1 и 0 на V_2. Ясно, что $f \in \mathcal{O}(V_1 \cup V_2)$ и $\mathrm{Sp}(a_1, \ldots, a_n) \subset V_1 \cup V_2$. Поэтому можно образовать элемент $j = f(a_1, \ldots, a_n)$. Так как $f^2 = f$, то $j^2 = j$. В силу следствия 1 предложения 2, $\chi(j) = 1$, если $\chi \in U_1$, и $\chi(j) = 0$, если $\chi \in U_2$. С другой стороны, пусть r — некоторый элемент радикала алгебры A, такой, что $j + r$ — идемпотент. Равенство $(j + r)^2 = j + r$ приводится к виду $r(1 - 2j - r) = 0$. Но так как функция

$$\mathcal{G}(1 - 2j - r) = 1 - 2\mathcal{G}j$$

нигде не обращается в нуль, то элемент $1 - 2j - r$ обратим. Следовательно, $r = 0$ и единственность j доказана.

Замечание. Сохраняя обозначения предложения 12 положим

$$\mathfrak{I}_1 = jA, \quad \mathfrak{I}_2 = (1 - j)A.$$

Тогда $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_2$ — идеалы в A и $\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 = A$. С другой стороны, $\mathfrak{I}_1$ (соответственно $\mathfrak{I}_2$) — множество всех $x \in A$, таких, что $jx = x$ (соответственно $(1 - j)x = x$); следовательно, $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 = \{0\}$ и $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2$ — замкнутые идеалы. Алгебра A отождествляется с прямой суммой алгебр $A/\mathfrak{I}_1$ и $A/\mathfrak{I}_2$. Если отождествить $\mathrm{X}(A/\mathfrak{I}_1)$ и $\mathrm{X}(A/\mathfrak{I}_2)$ с частями пространства $\mathrm{X}(A)$ (§ 1, n° 5), то окажется, что $\mathrm{X}(A/\mathfrak{I}_1) = U_2$ и $\mathrm{X}(A/\mathfrak{I}_2) = U_1$.

Следствие. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\mathrm{X}(A)$ связно;*

(ii) *1 и 0 — единственные идемпотенты в A;*

(iii) *A не изоморфна прямой сумме никаких двух ненулевых банаховых алгебр.*

Предложение 13. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра без радикала. Для того чтобы A содержала единицу, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{X}(A)$ было компактным.*

Необходимость вытекает из следствия теоремы 1 § 3. Предположим, что $\mathrm{X}(A)$ компактно. Пусть $\tilde{A}$ — банахова алгебра, полученная из A присоединением единицы; отождествим $\mathrm{X}'(A)$ и $\mathrm{X}(\tilde{A})$. Тогда дополнением к $\mathrm{X}(A)$ в $\mathrm{X}(\tilde{A})$ является единственный характер χ_0 алгебры $\tilde{A}$, обращающийся в нуль на A. В силу предложения 12, существует элемент $j \in \tilde{A}$, такой, что $\chi(j) = 1$ для всех $\chi \in \mathrm{X}(A)$ и $\chi_0(j) = 0$. Следовательно, $j \in A$ и $\chi(jx) = \chi(x)$ для всех $x \in A$ и всех $\chi \in \mathrm{X}(A)$ и, значит, $jx = x$, поскольку A — алгебра без радикала. Таким образом, j — единица алгебры A.

Предложение 14. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}_1$ — идеал в A, F_1 — множество всех $\chi \in \mathrm{X}(A)$, обращающихся в нуль на $\mathfrak{J}_1$, F_2 — замкнутое в топологии Джекобсона и компактное в слабой топологии подмножество в $\mathrm{X}(A)$, не пересекающееся с F_1. Тогда существует элемент $u \in \mathfrak{J}_1$, такой, что $\mathcal{G}u = 1$ на F_2.*

Пусть $\mathfrak{J}_2$ — пересечение ядер характеров, принадлежащих F_2. Ясно, что $A/\mathfrak{J}_2$ — подалгебра без радикала. Так как F_2 замкнуто в топологии Джекобсона, то множество элементов из $\mathrm{X}(A)$, обращающихся в нуль на $\mathfrak{J}_2$, совпадает с F_2. Поэтому множество F_2, снабженное топологией, индуцированной слабой топологией в $\mathrm{X}(A)$, совпадает с множеством $\mathrm{X}(A/\mathfrak{J}_2)$, снабженным слабой топологией (§ 1, n° 6). Так как F_2 слабо компактно, то $A/\mathfrak{J}_2$ содержит единицу (предложение 13). Если $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 \neq A$, то факторалгебра $(\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2)/\mathfrak{J}_2$ содержится в ядре некоторого ненулевого характера факторалгебры $A/\mathfrak{J}_2$ (§ 3, теор. 2), а в таком случае существовал бы ненулевой характер алгебры A, аннулирующий $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$; но тогда оказалось бы, что вопреки нашему предположению $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$. Таким образом, $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 = A$, и существует элемент $u \in \mathfrak{J}_1$, класс которого в факторалгебре $A/\mathfrak{J}_2$ является ее единичным элементом. Тогда $\chi(u) = 1$ для всех $\chi \in F_2$. Предложение доказано.

Следствие. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра, F_1 и F_2 — две непересекающиеся части пространства $\mathrm{X}(A)$, замкнутые в топологии Джекобсона. Пусть F_2 слабо компактно. Тогда существует элемент $u \in A$, такой, что $\mathcal{G}u = 1$ на F_2 и $\mathcal{G}u = 0$ на F_1.*

11. Разбиения спектра элемента алгебры

Замечание 1. Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$ и $K = \mathrm{Sp}\, x$. Пусть $\mathfrak{E}$ — множество частей K, которые являются одновременно открытыми и замкнутыми в K. Для каждой части $H \in \mathfrak{E}$ существует и притом единственный элемент $f_H \in \mathcal{O}(K)$, равный 1 в окрестности H и 0 в окрестности $K - H$. Положим $j_H = f_H(x)$. Тогда j_H является идемпотентом в A, который называют *ассоциированным с x и H*; при этом справедливы соотношения

$$j_{H \cap H'} = j_H j_{H'} = j_{H'} j_H \quad (H, H' \in \mathfrak{E}), \tag{17}$$

$$j_{H \cup H'} = j_H + j_{H'} - j_H j_{H'} \quad (H, H' \in \mathfrak{E}), \tag{18}$$

$$j_\varnothing = 0, \quad j_K = 1. \tag{19}$$

Ясно, что если j — идемпотент алгебры A, то jAj есть подмножество всех элементов $x \in A$, таких, что $xj = jx = x$; оно является, следовательно, банаховой подалгеброй в A с единицей j. В частности, если $H \in \mathfrak{E}$, то через A_H обозначается банахова алгебра $j_H A j_H$ с единицей j_H. Пусть B — наполненная замкнутая подалгебра в A, порожденная элементом x. Она коммутативна; если представление вида $K = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$ является разбиением K на элементы из $\mathfrak{E}$, то равенство $1 = j_{H_1} + \ldots + j_{H_n}$ является разложением единицы на сумму попарно ортогональных идемпотентов в B, и поэтому алгебра B канонически отождествляется с произведением $B_{H_1} \times \ldots \times B_{H_n}$.

Замечание 2. Для $H \in \mathfrak{E}$ положим $x_H = x j_H = j_H x \in B_H$. Имеем $x_H = g_H(x)$, где g_H — элемент из $\mathcal{O}(K)$, определенный соотношениями $g_H(z) = z$ в окрестности H и $g_H(z) = 0$ в окрестности $K - H$ (в самом деле, $g_H(z) = f_H(z)\, z$). Таким образом, если $H \neq K$, то

$$\mathrm{Sp}_A x_H = H \cup \{0\}. \tag{20}$$

Если $K = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$ — разбиение множества K на элементы из $\mathfrak{E}$, то

$$x = x_{H_1} + x_{H_2} + \ldots + x_{H_n}, \tag{21}$$

$$x_{H_i} x_{H_j} = 0, \quad i \neq j. \tag{22}$$

Замечание 3. Пусть по-прежнему $H \subset \mathfrak{E}$ и $\lambda \in \mathbf{C} - H$. Пусть $h_{H,\lambda}$ — элемент из $\mathcal{O}(K)$, равный $(\lambda - z)^{-1}$ в окрестности H и 0 в окрестности $K - H$. Тогда $(\lambda f_H - g_H)\, h_{H,\lambda} = f_H$;

следовательно, если положить $R_H(\lambda, x) = h_{H,\lambda}(x) \in B_H$, то

$$R_H(\lambda, x)(\lambda j_H - x_H) = (\lambda j_H - x_H) R_H(\lambda, x) = j_H, \tag{23}$$

$$R_H(\lambda, x) j_{K-H} = j_{K-H} R_H(\lambda, x) = 0. \tag{24}$$

Предположим, что для $\lambda \in H$ элемент $\lambda j_H - x_H$ имеет обратный y в алгебре A_H; тогда элемент $\lambda - x$ обратим в A и его обратный равен $y + R_{K-H}(\lambda, x)$; но это абсурдно, стало быть, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{A_H} x_H$. Отсюда и из (23) следует, что

$$\mathrm{Sp}_{A_H} x_H = H \tag{25}$$

и, значит, имеет место соотношение

$$H \neq \varnothing \Rightarrow j_H \neq 0. \tag{26}$$

Формула (23) показывает, что функция $\lambda \mapsto R_H(\lambda, x)$, определенная в $\mathbf{C} - H$, является резольвентой элемента x_H относительно A_H. Если

$$K = H_1 \cup \ldots \cup H_n$$

— разбиение K на элементы из $\mathfrak{E}$, то

$$R(\lambda, x) = R_{H_1}(\lambda, x) + \ldots + R_{H_n}(\lambda, x). \tag{27}$$

В частности, если $H \in \mathfrak{E}$, то функция $\lambda \mapsto R(\lambda, x)$ в окрестности H представляется в виде суммы $R_H(\lambda, x)$ и некоторой голоморфной функции.

Предложение 15. *Пусть μ — изолированная точка в $\mathrm{Sp}_A x$. Тогда*

(i) $$R(\lambda, x) = R_{\{\mu\}}(\lambda, x) + R_{\mathrm{Sp}_A x - \{\mu\}}(\lambda, x).$$

(ii) *Функция $\lambda \mapsto R_{\mathrm{Sp}_A x - \{\mu\}}(\lambda, x)$ голоморфна в окрестности точки μ; функция $\lambda \mapsto R_{\{\mu\}}(\lambda, x)$ голоморфна в $\mathbf{C} - \{\mu\}$.*

(iii) *Величина $\| (x-\mu)^n j_{\{\mu\}} \|^{1/n}$ стремится к 0, когда $n \to \infty$, и для каждого $\lambda \in \mathbf{C} - \{\mu\}$ имеет место равенство*

$$R_{\{\mu\}}(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^{-n-1} (x-\mu)^n j_{\{\mu\}}. \tag{28}$$

Утверждения (i) и (ii) немедленно следуют из предыдущего. Докажем (iii). Заменяя x на $x - \mu$, мы сводим это утверждение к случаю, когда $\mu = 0$. Положим $H = \{0\} \subset \mathrm{Sp}_A x$. Тогда спектром элемента x_H в A_H является $\{0\}$ и, значит, элемент x_H квазинильпотентен, т. е. $\| x^n j_H \|^{1/n} = \| (x j_H)^n \|^{1/n}$

стремится к 0. Кроме того, в A_H для каждого $\lambda \neq 0$ имеет место равенство

$$(\lambda j_H - x_H)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x_H^n$$

(§ 2, n° 5, формула (7)), из которого следует равенство (28).

Следствие. *Пусть μ — изолированная точка в $\mathrm{Sp}_A x$ и $p>0$ — целое число. Для того чтобы точка μ была полюсом порядка p резольвенты элемента x, необходимо и достаточно, чтобы* $(x-\mu)^{p-1} j_{\{\mu\}} \neq 0$, $(x-\mu)^p j_{\{\mu\}} = 0$.

Пример. Пусть E — комплексное банахово пространство, x — его непрерывный эндоморфизм. Рассмотрим спектр $\mathrm{Sp}\, x$ элемента x относительно банаховой алгебры с единицей $A = \mathscr{L}(E)$. Пусть H — часть $\mathrm{Sp}\, x$ одновременно открытая и замкнутая в $\mathrm{Sp}\, x$. Идемпотент j_H, ассоциированный с H и являющийся проектором на замкнутое векторное подпространство E_H в E, называют *ассоциированным* с x и H. Пусть E'_H — ядро этого проектора. Тогда E представляется в виде топологической прямой суммы подпространств E_H и E'_H, которые инвариантны относительно эндоморфизма x, коммутирующего с j_H. Алгебра A_H в данном случае является алгеброй всех эндоморфизмов E, обращающихся в нуль на E'_H, относительно которых инвариантно E_H. Пусть u — некоторый непрерывный эндоморфизм E, относительно которого инвариантны E_H и E'_H; для того чтобы элемент $u|E_H$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы uj_H был обратим в A_H, и аналогичное утверждение справедливо для $u|E'_H$. Отсюда и из (25) следует, что $\mathrm{Sp}(x|E_H) = H$ и $\mathrm{Sp}(x|E'_H) = \mathrm{Sp}\, x - H$.

Если H сводится к изолированной точке μ из $\mathrm{Sp}\, x$, то спектром элемента $x|E'_{\{\mu\}}$ является $\mathrm{Sp}\, x - \{\mu\}$ и, в частности, $(x-\mu)|E'_{\{\mu\}}$ — автоморфизм $E'_{\{\mu\}}$. С другой стороны, элемент $(x-\mu)|E_{\{\mu\}}$ квазинильпотентен. Для того чтобы точка μ была полюсом порядка $p>0$ резольвенты элемента x, необходимо и достаточно, чтобы $(x-\mu)^{p-1}|E_{\{\mu\}} \neq 0$, $(x-\mu)^p|E_{\{\mu\}} = 0$. В этом случае $E_{\{\mu\}} = \mathrm{Ker}\,(x-\mu)^p$ и $E'_{\{\mu\}} = \mathrm{Im}\,(x-\mu)^p$.

Мы можем резюмировать некоторые из приведенных здесь результатов следующим образом.

Предложение 16. *Пусть E — комплексное банахово пространство, x — его непрерывный эндоморфизм, μ — изолированная точка* $\mathrm{Sp}\, x$, *K — дополнение к $\{\mu\}$ в* $\mathrm{Sp}\, x$.

(i) *Пусть* Γ *— ориентированный край открытого круга* Δ *с центром в точке* μ, *такого, что* $K \cap (\Gamma \cup \Delta) = \varnothing$. *Тогда*

$$j = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (z - x)^{-1} dz$$

является идемпотентом, зависящим только от x *и* μ.

(ii) *Подпространства* $E' = \operatorname{Im} j$ *и* $E'' = \operatorname{Ker} j$ *инвариантны относительно* x, $(x - \mu)|E'$ *— квазинильпотентный элемент,* $(x - \mu)|E''$ *— автоморфизм* E''.

(iii) *Для того чтобы точка* μ *была полюсом порядка* $p > 0$ *резольвенты элемента* x, *необходимо и достаточно, чтобы* $(x - \mu)^{p-1}|E' \neq 0$, $(x - \mu)^{p}|E' = 0$.

§ 5. Регулярные коммутативные банаховы алгебры

1. Определение и простейшие свойства

Предложение 1. *Пусть* A *— коммутативная банахова алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Слабая топология и топология Джекобсона на* $X(A)$ *совпадают.*

(ii) *Для каждого характера* $\chi \in X(A)$ *и каждой слабо замкнутой части* F *в* $X(A)$, *для которой* $\chi \notin F$, *существует элемент* $x \in A$, *такой, что* $\mathscr{G}x$ *равно* 1 *в точке* χ *и* 0 *на* F.

(iii) *Для каждого компакта* K *в слабой топологии и каждой слабо замкнутой части* F *в* $X(A)$, *такой, что* $K \cap F = \varnothing$, *существует элемент* $x \in A$, *для которого* $\mathscr{G}x$ *равно* 1 *на* K *и* 0 *на* F.

Пусть $M \subset X(A)$. Замкнутость части M в топологии Джекобсона означает, что для каждого характера $\chi \in X(A) - M$ существует элемент $x \in A$, такой, что $\mathscr{G}x$ обращается в нуль на M, но отлично от нуля в точке χ. Поэтому (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Ясно, что (iii) $\Rightarrow$ (ii). Наконец, (i) $\Rightarrow$ (iii) в силу следствия предложения 14, § 4.

Определение 1. *Пусть* A *— коммутативная банахова алгебра. Она называется регулярной, если для нее выполняются эквивалентные условия предложения* 1.

Замечание. Пусть $\tilde{A}$ — банахова алгебра, полученная из A присоединением единицы. Как показывает условие (ii) предложения 1, регулярность алгебры $\tilde{A}$ влечет за собой регулярность A. Предположим, что A регулярна, и покажем, что тогда и $\tilde{A}$ регулярна. Пусть F и F' — пересекающиеся слабо замкнутые (следовательно, компактные в слабой топологии) части $X(\tilde{A})$; построим элемент $x \in \tilde{A}$, такой, что

$\mathscr{G}x = 0$ на F, $\mathscr{G}x = 1$ на F'. Пусть $\chi_0 \in \mathrm{X}(\tilde{A})$ — характер, обращающийся в нуль на A. Если $\chi_0 \notin F'$, то, в силу условия (iii) предложения 1, существует элемент $x \in A$, такой, что $\mathscr{G}x = 0$ на F, $\mathscr{G}x = 1$ на F'. Если $\chi_0 \notin F$, то, аналогично, существует элемент $y \in A$, такой, что $\mathscr{G}y = 0$ на F', $\mathscr{G}y = 1$ на F; поэтому мы можем положить $x = e - y \in \tilde{A}$.

Примеры. Рассмотрим примеры § 2, п° 2. В примерах 1 (алгебра непрерывных функций на локально компактном пространстве Ω, стремящихся к 0 на бесконечности) и 2 (алгебра n раз дифференцируемых функций на $(0, 1)$) A — регулярная алгебра (см. § 3, п° 3, примеры). То же самое будет доказано (гл. II, § 3, предложение 1) и для примера 4 (алгебра $L^1(\mathbf{Z})$). В примере 5 (алгебра функций, непрерывных в круге $|z| \leqslant 1$ и аналитических в открытом круге) A не является регулярной (§ 7, упр. 6).

Предложение 2. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра с единицей. Пусть $(U_1, \ldots, U_n)$ — какое-нибудь открытое покрытие пространства $\mathrm{X}(A)$. Тогда существуют элементы $x_1, \ldots, x_n \in A$, такие, что их сумма равна 1 и $\operatorname{supp}(\mathscr{G}x_i) \subset U_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ предложение очевидно. Предположим, что оно справедливо для $n - 1$.

Существует открытое покрытие $(V_1, \ldots, V_n)$ пространства $\mathrm{X}(A)$, такое, что $\overline{V}_i \subset U_i$ для каждого i. Согласно предположению индукции, существует последовательность элементов $x, x_3, x_4, \ldots, x_n \in A$, таких, что $x + x_3 + \ldots + x_n = 1$, $\operatorname{supp}(\mathscr{G}x) \subset V_1 \cup V_2$, $\operatorname{supp}(\mathscr{G}x_i) \subset V_i$ для всех $i > 2$. Положим $K = \operatorname{supp}(\mathscr{G}x)$. Пусть K_1 (соответственно K_2) — множество элементов из K, не принадлежащих V_1 (соответственно V_2). Тогда K_1 и K_2 — непересекающиеся компакты в K. Стало быть, существует элемент $y \in A$, такой, что $\mathscr{G}y = 1$ на K_1, $\mathscr{G}y = 0$ на K_2. Но тогда $\mathscr{G}(xy)$ обращается в нуль на $\mathrm{X}(A) - K$ и на K_2, следовательно, $\operatorname{supp}\mathscr{G}(xy) \subset \overline{V}_2 \subset U_2$; аналогично, $\mathscr{G}(x(1-y))$ равно нулю на $\mathrm{X}(A) - K$ и на K_1, следовательно,

$$\operatorname{supp}\mathscr{G}(x(1-y)) \subset \overline{V}_1 \subset U_1.$$

Поэтому можно положить $x_1 = x(1-y)$, $x_2 = xy$, и тогда последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ будет обладать требуемыми свойствами.

Следствие 1. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра с единицей, $\mathfrak{I}$ — идеал в A, $f\colon \mathrm{X}(A) \to \mathbf{C}$ — непрерывная функция. Предположим, что для каждого $\chi \in \mathrm{X}(A)$*

существует элемент $y_\chi \in \mathfrak{J}$, *такой, что* $f = \mathcal{G}y_\chi$ *в окрестности* χ. *Тогда существует элемент* $y \in \mathfrak{J}$, *такой, что* $\mathcal{G}y = f$ *на* $X(A)$.

Так как $X(A)$ — компакт, то для него существуют конечное открытое покрытие $(U_1, \ldots, U_n)$ и элементы $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{J}$, такие, что $f = \mathcal{G}y_i$ на U_i. Существуют (предложение 2) элементы $x_1, \ldots, x_n \in A$, такие, что их сумма равна 1 и $\operatorname{supp}(\mathcal{G}x_i) \subset U_i$ для каждого i. Пусть

$$y = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \in \mathfrak{J}.$$

Пусть, далее, $\chi \in X(A)$ и Λ — множество тех $i \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\chi \in U_i$. Если $i \in \Lambda$, то $\mathcal{G}y_i(\chi) = f(\chi)$; если $i \notin \Lambda$, то $\mathcal{G}x_i(\chi) = 0$, следовательно,

$$\mathcal{G}y(\chi) = \sum_{i \in \Lambda} \mathcal{G}x_i(\chi)\mathcal{G}y_i(\chi) = f(\chi) \sum_{i \in \Lambda} \mathcal{G}x_i(\chi) =$$

$$= f(\chi) \sum_{i=1}^{n} \mathcal{G}x_i(\chi) = f(\chi).$$

Следствие 2. *Пусть* A — *регулярная коммутативная банахова алгебра,* $\mathfrak{J}$ — *идеал в* A; $f\colon X'(A) \to \mathbf{C}$ — *непрерывная функция. Предположим что для каждого* $\chi \in X'(A)$ *существует элемент* $y_\chi \in \mathfrak{J}$, *такой, что* $f = \mathcal{G}'y_\chi$. *Тогда существует элемент* $y \in \mathfrak{J}$, *такой, что* $f = \mathcal{G}'y$ *на* $X'(A)$.

Пусть $\tilde{A}$ — банахова алгебра, полученная из A присоединением единицы. Тогда $\tilde{A}$ регулярна (замечание) и $X'(A) = X(\tilde{A})$; таким образом, достаточно применить к $\tilde{A}$ и $\mathfrak{J}$ следствие 1 предложения 2.

Если $\mathfrak{J}$ — идеал коммутативной банаховой алгебры, то мы обозначим через $h(\mathfrak{J})$ множество всех характеров $\chi \in X(A)$, ядро которых содержит $\mathfrak{J}$. Другими словами, $h(\mathfrak{J})$ — это множество точек $\chi \in X(A)$, где обращаются в нуль все функции $\mathcal{G}x$ для $x \in \mathfrak{J}$; $h(\mathfrak{J})$ — часть в $X(A)$, замкнутая в топологии Джекобсона.

Предложение 3. *Пусть* A — *регулярная коммутативная банахова алгебра,* $\mathfrak{J}$ — *идеал в* A, K — *некоторая часть* $X(A)$, *компактная и не пересекающаяся с* $h(\mathfrak{J})$. *Тогда существует элемент* $u \in \mathfrak{J}$, *такой, что* $\mathcal{G}u = 1$ *на* K.

Это утверждение является частным случаем предложения 14, § 4.

2. Гармонический синтез

Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Если M — некоторая часть в $X(A)$, то мы обозначим через $\mathfrak{k}(M)$ пересечение ядер характеров из M.

Предложение 4. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала. Пусть F — замкнутая часть в $\mathrm{X}(A)$. Множество идеалов $\mathfrak{J}$ в A, таких, что $h(\mathfrak{J}) = F$, содержит максимальный элемент, а именно $\mathfrak{f}(F)$, и минимальный элемент, а именно множество $\mathfrak{J}$ элементов $x \in A$, для которых носитель функции $\mathscr{G}x$ компактен и не пересекается с F.*

Утверждение, касающееся максимального элемента, очевидно. Ясно, что $\mathfrak{J}$ — идеал в A и что $h(\mathfrak{J}) \supset F$. Если $\chi \in \mathrm{X}(A) - F$, то существует компактная окрестность V точки χ, не пересекающаяся с F. Пусть, далее, элемент $x \in A$ таков, что $\mathscr{G}x$ равна 1 в точке χ и 0 вне V; тогда $x \in \mathfrak{J}$, следовательно, $\chi \notin h(\mathfrak{J})$ и, значит, $h(\mathfrak{J}) = F$. Наконец, предположим, что $\mathfrak{J}$ — идеал в A, такой, что $h(\mathfrak{J}) = F$, и покажем, что $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{J}$. Пусть C — компактная часть $\mathrm{X}(A)$, не пересекающаяся с F, и x — элемент нз A, такой, что $\operatorname{supp} \mathscr{G}x \subset C$. В силу предложения 3, существует элемент $u \in \mathfrak{J}$, такой, что $\mathscr{G}u = 1$ на C. Тогда $\mathscr{G}x = \mathscr{G}(ux)$ и, поскольку A — алгебра без радикала, $x = ux$ и, значит, $x \in \mathfrak{J}$. Таким образом, $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}$.

Следствие 1. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала, $\mathfrak{J}$ — множество тех $x \in A$, для которых $\mathscr{G}x$ имеет компактный носитель. Предположим, что $\overline{\mathfrak{J}} = A$. Тогда каждый замкнутый идеал в A, отличный от A, содержится в некотором регулярном максимальном идеале.*

Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A, который не содержится ни в одном регулярном максимальном идеале. Тогда $h(\mathfrak{J}) = \varnothing$, следовательно, $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{J}$ (предложение 4), откуда $\mathfrak{J} \supset \overline{\mathfrak{J}} = A$.

Следствие 2. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала. Пусть $x, y \in A$. Если носитель $\mathscr{G}x$ компактен и содержится в множестве тех точек, где $\mathscr{G}y \neq 0$, то элемент x кратен y в A.*

Пусть $\mathfrak{J} = Ay$. Тогда $h(\mathfrak{J})$ есть множество F нулей $\mathscr{G}y$. Так как носитель $\mathscr{G}x$ компактен и не пересекается с F, то $x \in \mathfrak{J}$ (предложение 4).

Определение 2. *Пусть A — коммутативная банахова алгебра. Говорят, что A удовлетворяет условию Диткина, если для каждого $\chi \in \mathrm{X}'(A)$ и каждого $x \in A$, такого, что $\mathscr{G}'x$ обращается в нуль в точке χ, существует последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ в A, такая, что $x = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n x)$ и каждая функция $\mathscr{G}'x_n$ обращается в нуль в некоторой окрестности V_n точки χ.*

С другой стороны, пусть A — коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — идеал в A, $x \in A$ и $\chi \in \mathrm{X}'(A)$. Говорят, что x *принадлежит идеалу* $\mathfrak{J}$ *в окрестности точки* χ, если существует элемент $y \in \mathfrak{J}$, такой, что $\mathscr{G}'y = \mathscr{G}'x$ в некоторой окрестности точки χ.

Замечание. Пусть A—коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — идеал в A, χ — элемент в $\mathrm{X}(A)$, такой, что $\chi \notin h(\mathfrak{J})$; тогда любой элемент $x \in A$ принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ. Действительно, согласно определению 1, существует элемент $z \in A$, такой, что $\mathscr{G}'z = 1$ в окрестности точки χ и $\mathscr{G}'z = 0$ в окрестности $h(\mathfrak{J})$; значит, $z \in \mathfrak{J}$ (предложение 4), и, следовательно, $xz \in \mathfrak{J}$ и $\mathscr{G}'(xz) = \mathscr{G}'x$ в окрестности точки χ.

Лемма 1. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала, удовлетворяющая условию Диткина. Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A, x — некоторый элемент из $\mathfrak{k}(h(\mathfrak{J}))$. Пусть, далее, G — множество точек $\chi \in \mathrm{X}'(A)$, таких, что x принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ. Тогда $\mathrm{X}'(A) - G$ — совершенное множество* (т. е. замкнуто и не имеет изолированных точек).

Ясно, что G — открытое множество. Предположим, что $\mathrm{X}'(A) - G$ содержит изолированную точку χ_0. Мы покажем, что это предположение приводит к противоречию. Так как χ_0 — изолированная точка в $\mathrm{X}'(A) - G$, то существует окрестность U этой точки, такая, что $U - \{\chi_0\} \subset G$. Если $\chi_0 \neq 0$, то существует элемент $u \in A$, для которого $\mathscr{G}'u = 1$ в окрестности точки χ_0 и $\mathscr{G}'u = 0$ в окрестности $\mathrm{X}'(A) - U$.

Принимая во внимание замечание, мы видим, что ux принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности любой точки $\chi \neq \chi_0$ и не принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ_0. Если $\chi_0 = 0$, то существует элемент $v \in A$, такой, что $\mathscr{G}'v = 0$ в окрестности точки χ_0 и $\mathscr{G}'v = 1$ в окрестности $\mathrm{X}'(A) - U$. Снова принимая во внимание замечание, мы видим, что $x - vx$ принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности любой точки $\chi \neq \chi_0$ и не принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ_0. Итак, в каждом из рассмотренных случаев мы указали элемент $y \in A$, принадлежащий $\mathfrak{J}$ в окрестности любой точки $\mathrm{X}'(A) - \{\chi_0\}$ и такой, что $\chi_0(y) = 0$. Так как A удовлетворяет условию Диткина, то существует последовательность $(x_1, x_2, \ldots)$ в A, такая, что $x_n y$ стремится к y при $n \to \infty$ и каждая из функций $\mathscr{G}'x_n$ обращается в нуль в некоторой окрестности точки χ_0. Тогда $x_n y$ принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности любой точки из $\mathrm{X}'(A)$ и потому $x_n y \in \mathfrak{J}$ (следствие 2 предложения 2). В силу замкнутости $\mathfrak{J}$ имеем $y \in \mathfrak{J}$. Но тогда y принадлежит $\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ_0 и, значит,

$\chi_0 \in G$ вопреки предположению. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Предложение 5. *Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала, удовлетворяющая условию Диткина. Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал алгебры A, такой, что граница $h(\mathfrak{J})$ не содержит непустых совершенных множеств. Тогда $\mathfrak{J}$ совпадает с множеством тех элементов $x \in A$, для которых функция $\mathscr{G}x$ обращается в нуль на $h(\mathfrak{J})$. В частности, если $h(\mathfrak{J})$ сводится к одной точке χ, то $\mathfrak{J} = \operatorname{Ker}\chi$.*

Пусть $x \in \mathfrak{f}(h(\mathfrak{J}))$. Нужно доказать, что $x \in \mathfrak{J}$. Так как $\mathscr{G}'x = 0$ на $h(\mathfrak{J})$, то множество G, введенное в рассмотрение в лемме 1, очевидно, содержит внутренность множества $h(\mathfrak{J}) \cup \{0\}$. В силу замечания, предшествующего лемме 1, G содержит также множество $X(A) - h(\mathfrak{J})$. Поэтому множество $X'(A) - G$, являющееся совершенным (лемма 1), содержится в границе множества $h(\mathfrak{J}) \cup \{0\}$. Из нашего предположения относительно $h(\mathfrak{J})$ следует, что $X'(A) - G \subset \{0\}$, и поскольку $X'(A) - G$ совершенно, оно пусто. Значит, $x \in \mathfrak{J}$ (следствие 2 предложения 2).

§ 6. Инволютивные нормированные алгебры

1. Инволютивные алгебры

Определение 1. *Пусть A — алгебра над $\mathbf{C}$. Инволюцией в A называется отображение $x \mapsto x^*$ из A в A, такое, что*

$$(x^*)^* = x, \quad (x+y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*, \quad (xy)^* = y^* x^*$$

для любых x, $y \in A$ и $\lambda \in \mathbf{C}$. Алгебра над полем $\mathbf{C}$, снабженная инволюцией, называется инволютивной алгеброй.

Обычно говорят, что элемент x^* *сопряжен* с элементом x. Подмножество в A, инвариантное относительно инволюции, называют *самосопряженным*.

Инволюция является, очевидно, изоморфизмом кольца A на противоположное кольцо A^0. Если A содержит единицу e, то $e^* = e$; алгебру (A, e) называют инволютивной алгеброй с единицей.

Примеры. 1) Пусть A — алгебра всех комплексных функций на некотором множестве. Отображение $f \mapsto \bar{f}$ является инволюцией в A.

2) Пусть H — комплексное гильбертово пространство и $A = \mathscr{L}(H)$. Отображение $x \mapsto x^*$ (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1) является инволюцией в A.

3) Пусть G — локально компактная группа. Известно (*Интегр.*, гл. VIII, § 3, предл. 2), что $\mathscr{M}^1(G)$ является банаховой алгеброй, содержащей единичный элемент ε_e. Отображение $x \mapsto x^{-1}$ из G на G преобразует каждую меру $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ в $\check{\mu} \in \mathscr{M}^1(G)$ (*Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 1). Обозначим через μ^* меру, комплексно сопряженную к мере $\check{\mu}$. Отображение $\mu \mapsto \check{\mu}$ является изоморфизмом банаховой алгебры $\mathscr{M}^1(G)$ на банахову алгебру $\mathscr{M}^1(G^0)$. Следовательно, отображение $\mu \mapsto \mu^*$ является изометрической инволюцией в $\mathscr{M}^1(G)$. Множество A ограниченных мер, абсолютно непрерывных по мере Хаара, является замкнутой подалгеброй в $\mathscr{M}^1(G)$, инвариантной относительно инволюции (*Интегр.*, гл. VIII, § 5, n° 5). Пусть β — левоинвариантная мера Хаара на G. Снабдим $L^1(G, \beta)$ произведением $(f, g) \mapsto f *^{\beta} g$ и инволюцией $f \mapsto f^* = \tilde{f} \cdot \Delta^{-1}$, где Δ — модуль (модулярная функция) G и $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$ для всех $x \in G$. Тогда отображение $f \mapsto f \cdot \beta$ есть изоморфизм инволютивной алгебры $L^1(G, \beta)$ на A. Этот изоморфиз изометричен.

Пусть A — инволютивная алгебра. Элемент $x \in A$ называют *эрмитовым*, если $x = x^*$, и *нормальным*, если $xx^* = x^*x$. (Эти определения являются обобщениями аналогичных определений, приведенных в *Алг.*, гл. IX, § 7, n° 3.) Каждый эрмитов элемент является нормальным. Множество всех эрмитовых элементов есть вещественное векторное подпространство в A. Если x и y — коммутирующие эрмитовы элементы, то $(xy)^* = y^*x^* = yx = xy$ и, следовательно, xy — эрмитов элемент. Для каждого $x \in A$ элементы x^*x и xx^* эрмитовы.

Каждый элемент $x \in A$ единственным образом представляется в виде $x_1 + ix_2$, где элементы x_1 и x_2 эрмитовы. Действительно, если положить $x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*)$, $x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*)$, то x_1, x_2 — эрмитовы элементы и $x = x_1 + ix_2$. Обратно, если $x = x_1 + ix_2$, где x_1 и x_2 — эрмитовы элементы, то $x^* = x_1 - ix_2$ и, следовательно, $x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*)$, $x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*)$. Таким образом, мы доказали существование и единственность элементов x_1 и x_2. Заметим, что

$$xx^* = x_1^2 + x_2^2 + i(x_2x_1 - x_1x_2),$$
$$x^*x = x_1^2 + x_2^2 - i(x_2x_1 - x_1x_2),$$

и, значит, элемент x нормален в том и только в том случае, когда x_1 и x_2 коммутируют.

Предположим, что алгебра A содержит единицу. Для того чтобы элемент $x \in A$ был обратим, необходимо и доста-

точно, чтобы элемент x^* был обратим, и тогда $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. Поскольку $(x - \lambda)^* = x^* - \bar{\lambda}$ для всех $\lambda \in \mathbf{C}$, отсюда следует, что $\mathrm{Sp}_A x^* = \overline{\mathrm{Sp}_A x}$. Элемент $x \in A$ называют *унитарным*, если $xx^* = x^*x = 1$, т. е. если x обратим и $x = x^{*-1}$.

Пусть A — инволютивная алгебра, $\tilde{A}$ — алгебра, полученная из A присоединением единицы. На $\tilde{A}$ существует и притом единственная инволюция, являющаяся продолжением инволюции на A; эта инволюция определяется равенством $(\lambda, x)^* = (\bar{\lambda}, x^*)$ для $\lambda \in \mathbf{C}$, $x \in A$. Если $x \in A$, то $\mathrm{Sp}'_A x^* = \overline{\mathrm{Sp}'_A x}$.

Пусть A и B — две инволютивные алгебры. *Морфизмом* алгебры A в B называется отображение $\varphi\colon A \to B$, такое, что

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y),$$
$$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x), \qquad \varphi(x^*) = \varphi(x)^*$$

для любых $x, y \in A$ и $\lambda \in \mathbf{C}$. Назовем инволютивной подалгеброй в A самосопряженную подалгебру в A. Центр алгебры A является инволютивной подалгеброй. Если A_1 — самосопряженный двусторонний идеал в A, то инволюция в A позволяет определить инволюцию в факторалгебре A/A_1, и каноническое отображение A на A/A_1 является морфизмом.

Радикал инволютивной алгебры A совпадает с радикалом противоположной алгебры и, следовательно, является самосопряженным.

Пусть A — инволютивная алгебра. Если $M \subset A$ — самосопряженное подмножество, то его коммутант M' является инволютивной подалгеброй в A. Для $x \in A$ бикоммутант пары $\{x, x^*\}$ является инволютивной подалгеброй, содержащей x и x^*, и эта подалгебра коммутативна в том и только в том случае, когда элемент x нормален.

Пусть A — инволютивная алгебра, B — ее максимальная коммутативная инволютивная подалгебра. Тогда B является максимальной коммутативной подалгеброй (и, значит, наполненной, если A — алгебра с единицей). В самом деле, если элемент $x \in A$ коммутирует с B, то x^* также коммутирует с B; следовательно, если x представить в виде $x_1 + ix_2$, где x_1 и x_2 — эрмитовы элементы, то x_1 и x_2 окажутся коммутирующими с B. Но тогда подалгебра в A, порожденная B и x_1, одновременно коммутативна и инволютивна и, значит, совпадает с B, откуда следует, что $x_1 \in B$; точно так же $x_2 \in B$ и, наконец, $x \in B$.

Пусть A — инволютивная алгебра. Если f — линейная форма на A, то функция $x \mapsto \overline{f(x^*)}$ на A также является

линейной формой; эта форма обозначается f^* и называется *сопряженной* с f. Имеют место равенства

$$f^{**}=f,\quad (f+f')^*=f^*+f'^*,\quad (\lambda f)^*=\bar{\lambda}f^*.$$

Говорят, что форма f *эрмитова*, если $f=f^*$. Любая линейная форма на A единственным образом представляется в виде f_1+if_2, где f_1 и f_2 — эрмитовы формы. Для того чтобы линейная форма f была эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы она была вещественной на множестве A_h эрмитовых элементов алгебры A. Отображение $f\mapsto f\mid A_h$ является изоморфизмом вещественного векторного пространства эрмитовых форм на векторное пространство, двойственное к вещественному векторному пространству A_h. Если A коммутативна и χ — характер A, то χ^* также является характером A и отображение $\chi\mapsto\chi^*$ есть гомеоморфизм $X'(A)$ на $X'(A)$.

2. *Инволютивные нормированные алгебры*

Определение 2. *Инволютивной нормированной (соответственно банаховой) алгеброй называют нормированную (соответственно банахову) алгебру, снабженную инволюцией $x\mapsto x^*$, такой, что $\|x^*\|=\|x\|$ для всех x.*

Примеры. 1) Пусть T — локально компактное пространство, A — алгебра непрерывных комплексных функций на T, стремящихся к 0 на бесконечности, снабженная нормой $\|f\|=\sup_{t\in T}|f(t)|$ и инволюцией $f\mapsto\bar{f}$. Тогда A — инволютивная банахова алгебра.

2) Инволютивная алгебра непрерывных эндоморфизмов гильбертова пространства (n° 1, пример 2), снабженная обычной нормой, является инволютивной банаховой алгеброй.

3) Инволютивная алгебра $\mathscr{M}^1(G)$ ограниченных мер на локально компактной группе (n° 1, пример 3), снабженная обычной нормой, является инволютивной банаховой алгеброй.

Пусть A — инволютивная нормированная алгебра, $\tilde{A}$ — нормированная алгебра, полученная из A присоединением единицы. Если алгебру $\tilde{A}$ снабдить инволюцией, как в n° 1, то $\tilde{A}$ станет инволютивной нормированной алгеброй.

Если A — инволютивная нормированная алгебра, то замыкание ее инволютивной подалгебры снова является инволютивной подалгеброй. Если $M\subset A$, то наименьшая инво-

лютивная замкнутая подалгебра, содержащая M, называется инволютивной замкнутой подалгеброй, *порожденной* M; она совпадает с замыканием подалгебры, порожденной множеством $M \cup M^*$. Если M сводится к одному нормальному элементу, то она коммутативна. Факторалгебра инволютивной нормированной алгебры по самосопряженному замкнутому двустороннему идеалу, произведение конечного числа инволютивных нормированных алгебр, пополнение инволютивной нормированной алгебры и противоположная к ней алгебра являются инволютивными нормированными алгебрами с естественной инволюцией.

Если A — инволютивная нормированная алгебра, а f — непрерывная линейная форма на A, то $\|f^*\| = \|f\|$. Множество A_h эрмитовых элементов из A является вещественным нормированным векторным пространством. Пусть f — линейная непрерывная эрмитова форма на A и $g = f|A_h$. Тогда $\|f\| = \|g\|$. Действительно, ясно, что $\|f\| \geqslant \|g\|$; с другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x \in A$, такой, что $\|x\| \leqslant 1$ и $|f(x)| \geqslant \|f\| - \varepsilon$. Заменяя x произведением x на скаляр, равный 1 по абсолютной величине, можно считать, что $f(x) \geqslant 0$; тогда

$$\left|g\left(\tfrac{1}{2}(x+x^*)\right)\right| = \tfrac{1}{2}|f(x)+f(x^*)| = f(x) \geqslant \|f\| - \varepsilon,$$

и поскольку $\left\|\frac{1}{2}(x+x^*)\right\| \leqslant 1$, мы имеем $\|g\| \geqslant \|f\| - \varepsilon$, откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, вытекает наше утверждение. Эрмитовы непрерывные линейные формы на A можно, следовательно, отождествить с вещественными непрерывными линейными формами на A_h.

3. C^*-алгебры

Определение 3. *C^*-алгеброй называется инволютивная банахова алгебра A, такая, что $\|x\|^2 = \|x^*x\|$ для всех $x \in A$.*

Примеры 1 и 2 п° 2 являются примерами C^*-алгебр (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1). Напротив, алгебра примера 3 не является, вообще говоря, C^*-алгеброй.

Замечания. 1) Пусть A — банахова алгебра, снабженная инволюцией, удовлетворяющей аксиоме

$$\|x\|^2 \leqslant \|x^*x\|. \tag{1}$$

Из (1) следует, что $\|x\|^2 \leqslant \|x^*\|\|x\|$, откуда $\|x\| \leqslant \|x^*\|$, и, заменяя x на x^*, мы получаем, что $\|x\| = \|x^*\|$. Следова-

тельно, (1) влечет за собой неравенство

$$\| x \|^2 \leqslant \| x^* x \| \leqslant \| x \|^2,$$

и, стало быть, A есть C^*-алгебра.

2) Пусть A есть C^*-алгебра. Тогда для каждого элемента $x \in A$ имеет место равенство

$$\| x \| = \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| xx' \|.$$

В самом деле, ясно, что $\| x' \| \leqslant 1$ влечет за собой $\| xx' \| \leqslant \| x \|$. При доказательстве неравенства $\| x \| \leqslant \sup_{\| x' \| \leqslant 1} \| xx' \|$ можно считать, что $\| x \| = 1$. Тогда $\| x^* \| = 1$ и $\| xx^* \| = \| x \|^2 = 1$.

3) Пусть A есть C^*-алгебра с единицей. Имеем

$$\| 1 \|^2 = \| 1^* 1 \| = \| 1 \|.$$

Следовательно, $\| 1 \| = 1$ или 0. Если $A \neq \{0\}$, то $\| 1 \| = 1$, откуда для всех унитарных элементов u получаем $\| u \| = \| u^* u \|^{1/2} = 1$.

4) Пусть (A_i) — семейство C^*-алгебр. Пусть A — множество всех последовательностей $(x_i) \in \prod A_i$, таких, что $\sup_i \| x_i \| < +\infty$. Если ввести на A операции

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i),\ \lambda (x_i) = (\lambda x_i),\ (x_i)\,(y_i) = (x_i y_i),\ (x_i^*) = (x_i^*)$$

и норму $\| (x_i) \| = \sup_i \| x_i \|$, то, как нетрудно убедиться, A станет C^*-алгеброй. Она называется произведением C^*-алгебр A_i.

5) Пусть A — инволютивная нормированная алгебра. Если $\| x \|^2 = \| x^* x \|$ для всех $x \in A$, то пополнение $\hat{A}$ алгебры A есть C^*-алгебра.

Предложение 1. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, B есть C^*-алгебра, π — некоторый морфизм инволютивной алгебры A в инволютивную алгебру B. Тогда для всех $x \in A$ справедливо неравенство $\| \pi (x) \| \leqslant \| x \|$.*

Заметим, что для каждого эрмитова элемента y в B имеют место равенства $\| y^2 \| = \| y^* y \| = \| y \|^2$, откуда $\| y^{2^n} \|^{2^{-n}} = \| y \|$ и, следовательно,

$$\rho (y) = \| y \|. \tag{2}$$

Ранее было отмечено (§ 1, п° 3), что для каждого элемента $x \in A$ мы имеем $\mathrm{Sp}'_B \pi (x) \subset \mathrm{Sp}'_A x$; стало быть,

$$\rho (\pi (x)) \leqslant \rho (x) \leqslant \| x \|$$

и, значит, с учетом (2)

$$\| \pi (x) \|^2 = \| \pi (x^* x) \| = \rho (\pi (x^* x)) \leqslant \| x^* x \| \leqslant \| x \|^2.$$

Предложение 2. *Пусть A есть C^*-алгебра, $\tilde{A}$ — инволютивная алгебра, полученная из A присоединением единицы. Тогда на алгебре $\tilde{A}$ существует и притом единственная норма, которая является продолжением нормы на A и относительно которой $\tilde{A}$ становится C^*-алгеброй.*

Единственность такой нормы вытекает из предложения 1. Если A содержит единичный элемент e, то $\tilde{A}$ представляется в виде произведения двусторонних самосопряженных идеалов A и $\mathbf{C}(\tilde{e}-e)$ (через $\tilde{e}$ обозначен единичный элемент из $\tilde{A}$). Достаточно положить для всех $x\in A$ и $\lambda\in\mathbf{C}$

$$\|x+\lambda(\tilde{e}-e)\|=\sup(\|x\|,\ |\lambda|);$$

тогда, в силу замечания 4, алгебра $\tilde{A}$ окажется C^*-алгеброй.

Предположим теперь, что алгебра A не содержит единичного элемента. Для каждого элемента $x\in\tilde{A}$ положим $\|x\|=\|L_x\|$, где L_x — оператор умножения слева на x в алгебре A. Определенная так норма элемента $x\in A$, в силу замечания 2, совпадает с исходной нормой на A. С другой стороны, $x\mapsto\|x\|$ есть полунорма на $\tilde{A}$ и $\|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$. Эта полунорма фактически является нормой. Действительно, пусть $x=\lambda\tilde{e}-x'$ ($\lambda\in\mathbf{C}$, $x'\in A$) — элемент из $\tilde{A}$, такой, что $xy=0$ для всех $y\in A$; покажем, что тогда $x=0$. Если $\lambda\neq 0$, то $\lambda^{-1}x'$ — левая единица в A; следовательно, $\tilde{\lambda}^{-1}x^*$ — правая единица в A и, значит, A, вопреки предположению, содержит единичный элемент; стало быть, $\lambda=0$, и тогда $\|-x'\|=0$, т. е. $x'=0$ и $x=0$. Тем самым доказано, что $x\mapsto\|x\|$ есть норма. Так как A — полная алгебра коразмерности 1 в $\tilde{A}$, то алгебра $\tilde{A}$ также полна. Остается показать (замечание 1), что $\|z\|^2\leqslant\|z^*z\|$ для всех $z\in\tilde{A}$; можно ограничиться случаем $\|z\|=1$. Для каждого $r<1$ существует элемент $y\in A$, такой, что $\|y\|\leqslant 1$ и $\|zy\|^2\geqslant r$; тогда, пользуясь тем, что $zy\in A$, имеем

$$\|z^*z\|\geqslant\|y^*(z^*z)y\|=\|(zy)^*(zy)\|=\|zy\|^2\geqslant r,$$

откуда $\|z^*z\|\geqslant 1$.

Говорят, что алгебра $\tilde{A}$, снабженная нормой, указанной в предложении 2, есть C^*-алгебра, *полученная из A присоединением единицы*. Заметим, что эта норма C^*-алгебры на $\tilde{A}$ не совпадает с рассмотренной в п° 2.

Предложение 3. *Пусть A есть C^*-алгебра.*

(i) *Если h — эрмитов элемент в A, то* $\mathrm{Sp}'h\subset\mathbf{R}$.

(ii) *Если алгебра A содержит единицу и если u — унитарный элемент из A, то* $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbf{U}$.

В силу предложения 2, при доказательстве этих двух утверждений можно алгебру A считать алгеброй с единицей (если $A \neq \{0\}$). Имеем $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$ (замечание 3), следовательно, $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathbf{U}$ (§ 2, следствие 3 теор. 1). С другой стороны,

$$(\exp(ih))^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n h^n}{n!}\right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n h^n}{n!} = \exp(-ih),$$

и, стало быть, элемент $\exp(ih)$ — унитарный; следовательно, если $z \in \mathrm{Sp}\, h$, то $\exp(iz) \in \mathbf{U}$ и, таким образом, $z \in \mathbf{R}$.

Предложение 4. *Пусть A есть C^*-алгебра, B — ее C^*-подалгебра и $x \in B$. Тогда*

(i) $\mathrm{Sp}'_A x = \mathrm{Sp}'_B x$.

(ii) *Если A содержит единичный элемент, принадлежащий B, то B — наполненная подалгебра в A и* $\mathrm{Sp}_A x = \mathrm{Sp}_B x$.

Присоединение единичного элемента дает возможность из (ii) вывести (i). Докажем (ii). Если x — эрмитов элемент, то $\mathrm{Sp}_B x \subset \mathbf{R}$; следовательно, $\mathrm{Sp}_B x = \mathrm{Sp}_A x$ (§ 2, предл. 6). В общем случае, если элемент $x \in B$ обратим в A, то xx^* обратим в A и, стало быть, в силу сказанного, в B; значит, x обратим справа в B. Точно так же получается, что x обратим слева в B и, следовательно, x обратим в B. Поэтому B — наполненная подалгебра в A и, значит, $\mathrm{Sp}_A x = \mathrm{Sp}_B x$.

4. Коммутативные C^*-алгебры

Теорема 1. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра, B — C^*-алгебра непрерывных комплексных функций на $\mathrm{X}(A)$, стремящихся к 0 на бесконечности. Тогда*

(i) *каждый характер алгебры A эрмитов.*

(ii) *Преобразование Гельфанда является изоморфизмом C^*-алгебры A на C^*-алгебру B.*

Если элемент $x \in A$ эрмитов, то $\mathscr{G}x$ — вещественная функция (предложение 3). Стало быть, $\mathscr{G}x^* = \overline{\mathscr{G}x}$ для всех $x \in A$, и утверждение (i) доказано. Так как функции $\mathscr{G}x$ разделяют точки пространства $\mathrm{X}(A)$ и для каждой точки в $\mathrm{X}(A)$ существует функция $\mathscr{G}x$, не обращающаяся в нуль в этой точке, то $\mathscr{G}(A)$ плотно в B (*Общ. топ.*, гл. X, 2-е изд., § 4, след. 2 предл. 7). Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathscr{G}$ — изометрическое отображение. Но

$\|\mathcal{G}y\| = \|y\|$ для эрмитовых элементов y (формула (2)), откуда для всех $x \in A$ имеем

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \|\mathcal{G}(x^*x)\| = \|\overline{\mathcal{G}x} \cdot \mathcal{G}x\| = \|\mathcal{G}x\|^2.$$

Следствие. *Пусть A есть C^*-алгебра, x — нормальный элемент в A. Тогда $\|x\| = \rho(x)$.*

Так как x и x^* порождают коммутативную C^*-подалгебру в A, можно ограничиться случаем коммутативной алгебры A. Но тогда наше утверждение немедленно вытекает из теоремы 1.

5. Функциональное исчисление в C^*-алгебрах

Предложение 5. *Пусть A есть C^*-алгебра с единицей, $x \in A$ — нормальный элемент, $S = \mathrm{Sp}_A x$, A' есть C^*-алгебра с единицей непрерывных комплексных функций на S. Тогда существует и притом единственный морфизм алгебр с единицей φ инволютивной алгебры A' в инволютивную алгебру A, такой, что $\varphi(z) = x$, где z — функция $\lambda \mapsto \lambda$ на S. Этот морфизм изометричен. Его образ есть C^*-подалгебра с единицей в A, порожденная элементом x и, стало быть, состоящая из нормальных элементов.*

Многочлены от z и $\bar{z}$ всюду плотны в A', и любой морфизм из A' в A непрерывен (предложение 1), откуда немедленно вытекает единственность морфизма φ. Пусть B есть C^*-подалгебра с единицей в A, порожденная элементом x. Она коммутативна. Отображение $\chi \mapsto \chi(x)$ пространства $\mathrm{X}(B)$ на $\mathrm{Sp}_B x = S$ непрерывно и инъективно, так как два характера алгебры B, совпадающие в точке x, совпадают всюду (теорема 1 (i)); это отображение порождает изоморфизм $\psi\colon A' \to \mathcal{C}(\mathrm{X}(B))$, который преобразует функцию z в функцию $\mathcal{G}_B x$. Изоморфизм

$$A' \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}(\mathrm{X}(B)) \xrightarrow{\mathcal{G}_B^{-1}} B$$

в суперпозиции с инъекцией $B \to A$ является искомым морфизмом.

Определение 4. *Если x — нормальный элемент в A и $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}_A x)$, то элемент $\varphi(f)$, указанный в предложении 5, обозначается $f(x)$.*

Имеют место равенства

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \tag{3}$$

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x), \tag{4}$$

$$\bar{f}(x) = f(x)^*, \tag{5}$$

$$\|f(x)\| = \|f\| \tag{6}$$

для f, $g \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}\, x)$. Если f — сужение на S многочлена $P(\lambda, \bar{\lambda})$, то $f(x) = P(x, x^*)$ в обычном алгебраическом смысле.

В соответствии с введенными выше обозначениями

$$\mathrm{Sp}_A f(x) = \mathrm{Sp}_B f(x) = \mathrm{Sp}_{A'} f = f(S),$$

или

$$\mathrm{Sp}_A(f(x)) = f(\mathrm{Sp}_A x). \tag{7}$$

Предложение 6. *Пусть A и B суть C^*-алгебры с единицей, φ — морфизм из A в B, x — нормальный элемент в A, такой, что $\varphi(x)$ — нормальный элемент в B. Пусть, далее, $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A x)$. Тогда сужение функции f на $\mathrm{Sp}_B \varphi(x)$* (по-прежнему обозначаемое через f) *удовлетворяет соотношению* $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$.

Отображения $f \mapsto \varphi(f(x))$ и $f \mapsto f(\varphi(x))$ являются морфизмами алгебр с единицей из $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A x)$ в B, принимающими одинаковые значения на функциях $f(\lambda) = \lambda$ и $f(\lambda) = \bar{\lambda}$; стало быть, эти отображения совпадают всюду.

Следствие 1. *Пусть A — коммутативная C^*-алгебра с единицей, $x \in A$ и $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}\, x)$. Тогда $\mathscr{G}(f(x)) = f \circ \mathscr{G}x$.*

Следствие 2. *Пусть A есть C^*-алгебра с единицей и $x \in A$. Пусть $f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}\, x)$ и $g \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(f(x))) = \mathscr{C}(f(\mathrm{Sp}\, x))$. Тогда*

$$g \circ f \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}\, x) \quad \text{и} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Отображение $g \mapsto (g \circ f)(x)$ есть морфизм алгебр с единицей из $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}(f(x)))$ в A, который преобразует функцию $\lambda \mapsto \lambda$ в $f(x)$. В силу доказанной единственности (предложение 5), имеем $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Предложение 7. *Пусть A есть C^*-алгебра с единицей, $x \in A$ — нормальный элемент и $f \in \mathscr{O}(\mathrm{Sp}\, x)$. Приведенное выше определение функции $f(x)$ и то, которое рассматривалось в* § 4, n° 8 (*определение* 1), *эквивалентны.*

Возьмем функцию $f(x)$ в смысле определения 4. Отображение $f \mapsto f(x)$, суженное на $\mathscr{O}(\mathrm{Sp}\, x)$, является непрерывным морфизмом алгебр с единицей из $\mathscr{O}(\mathrm{Sp}\, x)$ в A, который преобразует функцию $\lambda \mapsto \lambda$ в x и, стало быть, является морфизмом, указанным в § 4, теор. 3.

Предложение 8. *Пусть A есть C^*-алгебра, $x \in A$ — нормальный элемент, $S = \mathrm{Sp}'\, x$, A' есть C^*-алгебра непрерывных функций на S, обращающихся в нуль в точке 0. Тогда существует и притом единственный морфизм φ инволютивной алгебры A' на инволютивную алгебру A, такой, что $\varphi(z) = x$.*

Этот морфизм изометричен. Его образ есть C^*-подалгебра алгебры A, порожденная элементом x, и, следовательно, состоит из нормальных элементов.

Единственность морфизма φ немедленно следует из того, что многочлены от z и $\bar{z}$, обращающиеся в нуль в точке $z=0$, всюду плотны в A'. Существование вытекает из предложения 5 после присоединения к алгебре A единичного элемента (предложение 2).

Если $f \in A'$, то образ f под действием морфизма φ обозначается $f(x)$.

Замечание. Все результаты этого пункта без труда распространяются mutatis mutandis на морфизмы предложения 8.

Пусть x — эрмитов элемент C^*-алгебры A. Его спектр вещественен. Рассмотрим следующие непрерывные функции вещественной переменной:

$$t \mapsto f_1(t) = \sup(t, 0), \quad t \mapsto f_2(t) = \sup(-t, 0), \quad t \mapsto f_3(t) = |t|.$$

Положим $x^+ = f_1(x)$, $x^- = f_2(x)$, $|x| = \operatorname{abs}(x) = f_3(x)$. Так как функции f_1, f_2, f_3 вещественны, то x^+, x^- и $|x|$ — эрмитовы элементы C^*-подалгебры алгебры A, порожденной элементом x. Поскольку функции f_i неотрицательны, имеем

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{Sp}'(x^+) \subset \mathbf{R}_+, \quad \operatorname{Sp}'(x^-) \subset \mathbf{R}_+, \quad \operatorname{Sp}'(|x|) \subset \mathbf{R}_+.$$

Из равенств $f_1(t) - f_2(t) = t$, $f_1(t) + f_2(t) = f_3(t)$, $f_1(t) f_2(t) = 0$ получаем

$$\text{(9)} \qquad x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad x^+x^- = x^-x^+ = 0.$$

Норма элемента $|x|$ равна норме элемента x, а нормы элементов x^+ и x^- мажорируются нормой элемента x.

Предположим, что $\operatorname{Sp}' x \subset \mathbf{R}_+$. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ и g — сужение на $\operatorname{Sp}' x$ функции $t \mapsto t^\alpha$. Положим $g(x) = x^\alpha$. Таким образом, x^α — эрмитов элемент C^*-подалгебры алгебры A, порожденной элементом x. Имеем $\operatorname{Sp}' x^\alpha = \mathbf{R}_+$. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^*$ немедленно получаются равенства

$$\text{(10)} \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}, \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$$

Предложение 9. *Пусть x — эрмитов элемент алгебры A, такой, что $\operatorname{Sp}' x \subset \mathbf{R}_+$. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Тогда $x^{1/\alpha}$ — единственный эрмитов элемент y в A, такой, что $\operatorname{Sp}' y \subset \mathbf{R}_+$ и $y^\alpha = x$.*

Уже известно, что $\operatorname{Sp}'(x^{1/\alpha}) \subset \mathbf{R}_+$ и что $(x^{1/\alpha})^\alpha = x$. Пусть y — какой-нибудь эрмитов элемент из A, для которого $\operatorname{Sp}' y \subset \mathbf{R}_+$ и $y^\alpha = x$. Покажем, что $y = x^{1/\alpha}$. Рассматривая C^*-подалгебру в A, порожденную элементом y (C^*-подал-

гебру, которая содержит элемент x и, следовательно, элемент $x^{1/\alpha}$), мы можем ограничиться тем случаем, когда алгебра A коммутативна. Но тогда наше утверждение немедленно вытекает из теоремы 1.

6. C^*-алгебра, обертывающая инволютивную банахову алгебру

Лемма 1. *Пусть A — инволютивная алгебра над полем* $\mathbf{C}$ *и p — некоторая полунорма на A. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Для любых $x, y \in A$ имеют место соотношения*

$$p(xy) \leqslant p(x)\,p(y), \quad p(x^*) = p(x) \text{ и } p(x)^2 = p(x^*x).$$

(ii) *Множество $\mathfrak{N}$ элементов x, таких, что $p(x) = 0$, является самосопряженным двусторонним идеалом в A, и норма, индуцированная полунормой p в факторалгебре $A/\mathfrak{N}$, превращает последнюю в инволютивную нормированную алгебру, пополнение которой есть C^*-алгебра.*

(iii) *Существует морфизм φ инволютивной алгебры A в некоторую C^*-алгебру, такой, что $p(x) = \|\varphi(x)\|$.*

Легко видеть, что (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Полунорму, удовлетворяющую условиям леммы, мы будем называть *C^*-полунормой* на инволютивной алгебре A.

Предположим теперь, что *A — инволютивная банахова алгебра* и S — множество всех C^*-полунорм на A. Для всех $x \in A$ и $p \in S$ имеет место неравенство $p(x) \leqslant \|x\|$ (предложение 1). Функция $x \mapsto \|x\|_* = \sup_{p \in S} p(x)$ есть C^*-полунорма на A, которая является, очевидно, самой сильной C^*-полунормой.

Определение 5. *Пусть $\mathfrak{N}$ — множество всех элементов $x \in A$, таких, что $\|x\|_* = 0$; C^*-алгебра, являющаяся пополнением факторалгебры $A/\mathfrak{N}$ по норме, индуцированной полунормой $x \mapsto \|x\|_*$, называется C^*-алгеброй, обертывающей инволютивную банахову алгебру A, и обозначается* $\mathrm{Stell}(A)$ *или* $\mathrm{St}(A)$.

Предложение 10. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, j — канонический морфизм из A в $\mathrm{St}(A)$. Тогда для каждого морфизма φ инволютивной алгебры A в C^*-алгебру B существует и притом единственный морфизм φ' из C^*-алгебры $\mathrm{St}(A)$ в C^*-алгебру B, такой, что $\varphi = \varphi' \circ j$.*

Действительно, функция $x \mapsto \|\varphi(x)\|$ есть C^*-полунорма на A. Следовательно, $\|\varphi(x)\| \leqslant \|x\|_*$ для всех $x \in A$. Данный морфизм определяет после перехода к факторалгебре непре-

рывный морфизм из $A/\mathfrak{R}$ в B, который продолжается по непрерывности в $\mathrm{St}(A)$. Единственность φ' очевидна.

Ясно, что если алгебра A коммутативна (соответственно содержит единичный элемент), то алгебра $\mathrm{St}(A)$ также коммутативна (соответственно содержит единичный элемент).

Следствие. *Пусть A — коммутативная инволютивная банахова алгебра, j — канонический морфизм из A в $\mathrm{St}(A)$. Тогда отображение $\mathrm{X}(j)$ является гомеоморфизмом пространства $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ на подпространство H в $\mathrm{X}(A)$, состоящее из эрмитовых характеров.*

Действительно, эрмитов характер есть не что иное, как морфизм инволютивных алгебр со значениями в C^*-алгебре $\mathbf{C}$. Поэтому из предложения 10 следует, что $\mathrm{X}(j)$ есть биекция пространства $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ на H. Более того, в пространстве $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ топологии простой сходимости на $j(A)$ и на $\mathrm{St}(A)$ совпадают, так как $j(A)$ плотно в $\mathrm{St}(A)$ и пространство $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ равностепенно непрерывно. Следовательно, $\mathrm{X}(j)$ — гомеоморфизм.

Поскольку $\mathrm{X}(j)$ — гомеоморфизм, мы можем отождествить пространства $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ и H. Тогда если $x \in A$, то функция $\mathscr{G}_{\mathrm{St}(A)}(j(x))$ есть сужение на H функции $\mathscr{G}_A(x)$.

Предложение 11. *Пусть A — инволютивная банахова алгебра, $\mathfrak{R}$ — ее радикал. Если $x \in \mathfrak{R}$, то его канонический образ $j(x)$ в $\mathrm{St}(A)$ есть нуль.*

Действительно, так как $x^*x \in \mathfrak{R}$, то $\mathrm{Sp}'_A(x^*x) = \{0\}$ (§ 1, n° 3, замечание 3); следовательно, $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{St}(A)}(j(x)^* j(x)) = \{0\}$ и, значит, $\|j(x)^* j(x)\| = 0$ (n° 3, формула (2)), откуда $j(x) = 0$.

7. C^*-алгебра локально компактной группы

Пусть G — локально компактная группа. Пусть A — инволютивная банахова алгебра ограниченных мер на G, абсолютно непрерывных по мере Хаара. C^*-алгебру, обертывающую инволютивную банахову алгебру A, называют *C^*-алгеброй группы G* и обозначают $\mathrm{Stell}(G)$ или $\mathrm{St}(G)$. Если выбирается левая мера Хаара на G, то A канонически отождествляется с $L^1(G)$, и можно определить $\mathrm{St}(G)$ как C^*-алгебру, обертывающую инволютивную банахову алгебру $L^1(G)$.

Выберем некоторую левую меру Хаара на G. Известно (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, предл. 6), что если $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ и $f \in L^2(G)$, то и $f * \mu \in L^2(G)$. Если $\gamma(\mu)$ обозначает эндоморфизм $f \to \mu * f$ пространства $L^2(G)$, то, как известно, γ

является представлением банаховой алгебры $\mathscr{M}^1(G)$ в банахову алгебру $B=\mathscr{L}(L^2(G))$ непрерывных эндоморфизмов пространства $L^2(G)$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, след. предл. 6). С другой стороны, известно, что $\gamma(\check{\mu})$ — сопряженное отображение к эндоморфизму $\gamma(\mu)$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, n° 3). Легко видеть, что отображение $\gamma(\mu^*)$ является *сопряженным* к отображению $\gamma(\mu)$ и что γ есть морфизм инволютивной алгебры $\mathscr{M}^1(G)$ в C^*-алгебру B, называемый *левым регулярным представлением* алгебры $\mathscr{M}^1(G)$ в пространстве $L^2(G)$. Согласно *Интегр.*, гл. VIII, § 4, n° 7, предл. 19, это представление *инъективно*.

Сужение на $L^1(G)$ представления γ определяет инъективный морфизм инволютивной алгебры $L^1(G)$ в алгебру B (называемый левым регулярным представлением $L^1(G)$ в $L^2(G)$), и, значит, существует морфизм γ': $\mathrm{St}(G)\to B$, такой, что $\gamma=\gamma'\circ j$, где через j обозначено каноническое отображение $L^1(G)$ в $\mathrm{St}(G)$. Говорят, что γ' есть левое регулярное представление алгебры $\mathrm{St}(G)$ в $L^2(G)$ (это представление, вообще говоря, не инъективно). Допуская вольность в обозначениях, можно написать равенство

$$\varphi * f=\gamma'(\varphi)(f) \tag{11}$$

для $f\in L^2(G)$ и $\varphi\in\mathrm{St}(G)$. Имеем

$$\|\varphi * f\|_2\leqslant\|\varphi\|_*\|f\|_2. \tag{12}$$

Предложение 12. *Каноническое отображение алгебры $L^1(G)$ в $\mathrm{St}(G)$ инъективно.*

Так как отображение γ инъективно, то это немедленно вытекает из равенства $\gamma=\gamma'\circ\varphi$.

Следствие. *Алгебра $L^1(G)$ является алгеброй без радикала.* Это вытекает из предложений 11 и 12.

Итак, можно отождествить $L^1(G)$ с плотной инволютивной подалгеброй в $\mathrm{St}(G)$. Тогда каноническая инъекция алгебры $L^1(G)$ в $\mathrm{St}(G)$ непрерывна.

Предположим теперь, что группа G *унимодулярна*. Тогда можно повторить все предыдущие рассуждения, взяв в качестве исходного отображение $(f,\mu)\mapsto f*\check{\mu}=\delta(\mu)(f)$ из $L^2(G)\times\mathscr{M}^1(G)$ в $L^2(G)$. Точно так же, как и раньше, определяется $f*\varphi$ для $f\in L^2(G)$ и $\varphi\in\mathrm{St}(G)$. Но теперь для $f\in L^2(G)$ и $\varphi,\psi\in\mathrm{St}(G)$ имеет место равенство

$$(\varphi * f)*\psi=\varphi*(f*\psi). \tag{13}$$

В самом деле, эта формула справедлива для $\varphi,\psi\in L^1(G)$; отображения $(\varphi,\psi)\mapsto(\varphi*f)*\psi$, $(\varphi,\psi)\mapsto\varphi*(f*\psi)$ являются непрерывными билинейными отображениями из $\mathrm{St}(G)\times\mathrm{St}(G)$ в $L^2(G)$.

8. Положительные эндоморфизмы гильбертовых пространств

Пусть E — комплексное гильбертово пространство и $x \in \mathscr{L}(E)$. Напомним (*Топ. векг. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1), что элемент x называется *положительным*, если $(x\xi \mid \xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in E$; в таком случае мы будем писать $x \geqslant 0$. Положительные элементы пространства $\mathscr{L}(E)$ эрмитовы (см. там же).

С другой стороны, под спектром элемента из пространства $\mathscr{L}(E)$ мы всегда будем понимать его спектр относительно алгебры с единицей $\mathscr{L}(E)$.

Предложение 13. *Пусть $x \in \mathscr{L}(E)$. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *x — положительный элемент*;

(ii) *x — эрмитов и $\operatorname{Sp} x \subset \mathbf{R}_+$*;

(iii) *существует эрмитов элемент y из $\mathscr{L}(E)$, такой, что $x = y^2$*;

(iv) *существует непрерывное линейное отображение z из E в некоторое гильбертово пространство, такое, что $x = z^*z$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii): предположим, что $x \geqslant 0$. Так как элемент x при этом эрмитов, то $\operatorname{Sp} x \subset \mathbf{R}$. Покажем, что $\operatorname{Sp} x \in \mathbf{R}_+$, т. е. что элемент $\lambda + x$ обратим для всех $\lambda > 0$. Если $\xi \in E$ и $\|\xi\| = 1$, то

$$\|(\lambda + x)\xi\| \geqslant ((\lambda + x)\xi \mid \xi) \geqslant \lambda(\xi \mid \xi) = \lambda.$$

Это неравенство доказывает, что отображение $\lambda + x$ из E на $\operatorname{Im}(\lambda + x)$ биективно и взаимно непрерывно, т. е. что пространство $\operatorname{Im}(\lambda + x)$ полно и, значит, замкнуто. С другой стороны, $\operatorname{Ker}(\lambda + x)^* = \operatorname{Ker}(\lambda + x) = 0$ и, следовательно, $\operatorname{Im}(\lambda + x)$ плотно в E (*Топ. векг. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1). Поэтому элемент $\lambda + x$ обратим в $\mathscr{L}(E)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): если элемент x эрмитов и $\operatorname{Sp} x \subset \mathbf{R}_+$, то можно образовать элемент $y = x^{1/2}$, и тогда $x = y^2$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): очевидно.

(iv) $\Rightarrow$ (i): если $x = z^*z$, то для всех $\xi \in E$ имеет место неравенство

$$(x\xi \mid \xi) = (z^*z\xi \mid \xi) = (z\xi \mid z\xi) \geqslant 0.$$

Следствие. *Если положительные элементы x и y коммутируют в $\mathscr{L}(E)$, то $xy \geqslant 0$.*

Действительно, $x^{1/2}$ и $y^{1/2}$ тогда тоже коммутируют и, значит,

$$xy = y^{1/2}xy^{1/2} = (x^{1/2}y^{1/2})^*(x^{1/2}y^{1/2}) \geqslant 0.$$

Напомним (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1), что для каждого эрмитова элемента x из $\mathscr{L}(E)$ определяются следующие числа:

$$m(x) = \inf_{\xi \in E,\ \|\xi\|=1} (x\xi \mid \xi), \quad M(x) = \sup_{\xi \in E,\ \|\xi\|=1} (x\xi \mid \xi).$$

Предложение 14. *Пусть x — эрмитов элемент пространства $\mathscr{L}(E)$. Тогда*

(i) *$m(x)$ и $M(x)$ — соответственно точные нижняя и верхняя грани множества* $\mathrm{Sp}(x)$.

(ii) *Если $E \neq \{0\}$, то* $\|x\| = \sup(|m(x)|, |M(x)|)$.

Пусть $\lambda \in \mathbf{R}$. Для того чтобы число λ располагалось левее множества $\mathrm{Sp}\, x$ на $\mathbf{R}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Sp}(x - \lambda) \subset \mathbf{R}_+$, т. е. чтобы $x \geqslant \lambda$, иначе говоря, чтобы $m(x) \geqslant \lambda$; стало быть, $m(x)$ — точная нижняя грань $\mathrm{Sp}(x)$.

Точно так же можно показать, что $M(x)$ — точная верхняя грань $\mathrm{Sp}(x)$. В силу (2), имеет место равенство $\rho(x) = \|x\|$; если $E \neq \{0\}$, то $\mathrm{Sp}(x)$ не пуст и $\rho(x) = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(x)} |\lambda|$. Следовательно, (ii) вытекает из (i).

Пусть E, F — комплексные гильбертовы пространства и $z \in \mathscr{L}(E; F)$. Так как $z^*z \in \mathscr{L}(E)$ и $z^*z \geqslant 0$, то можно образовать элемент $(z^*z)^{1/2}$, который является положительным элементом из $\mathscr{L}(E)$.

Определение 6. *Элемент $(z^*z)^{1/2}$ называется абсолютным значением z и обозначается $|z|$ или* $\mathrm{abs}(z)$.

Если $z \in \mathscr{L}(E)$ — нормальный элемент, то $|z| = f(z)$, где через f обозначено сужение на $\mathrm{Sp}\, z$ функции $\zeta \mapsto |\zeta|$ (действительно, $|\zeta| = (\bar{\zeta}\zeta)^{1/2}$ для всех комплексных чисел ζ). В частности, для эрмитова элемента z определение 6 вполне согласовано с определением п° 5.

Предложение 15. *Пусть $z \in \mathscr{L}(E; F)$, M — начальное подпространство для z* (т. е. (*Топ. вект. пр.*, там же) *ортогональное дополнение к* $\mathrm{Ker}\, z$) *и N — конечное подпространство для z* (*т. е.* $\overline{\mathrm{Im}\, z}$). *Тогда*

(i) $\mathrm{Ker}(\mathrm{abs}(z)) = \mathrm{Ker}\, z$, $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{abs}(z))} = M$, $\|\mathrm{abs}(z)\| = \|z\|$.

(ii) *Существует и притом единственное частично изометрическое отображение u из E в F, такое, что* $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, z$ *и* $z = u(\mathrm{abs}(z))$.

(iii) *Начальное подпространство для u совпадает с M, конечное — с N.*

(iv) *Пусть z_1 — положительный элемент из $\mathscr{L}(E)$, а u_1 — частично изометрический элемент из $\mathscr{L}(E; F)$, причем* $\mathrm{Ker}(u_1) = \mathrm{Ker}(z_1)$ *и* $z = u_1 z_1$; *тогда* $z_1 = \mathrm{abs}(z)$ *и* $u_1 = u$.

Для любого $\xi \in E$ имеет место равенство

(14) $\|z\xi\|^2 = (z^*z\xi \mid \xi) = ((\mathrm{abs}(z))^2 \xi \mid \xi) = \|(\mathrm{abs}(z))\xi\|^2.$

Следовательно, $\mathrm{Ker}(z) = \mathrm{Ker}(\mathrm{abs}(z))$ и $\|\mathrm{abs}(z)\| = \|z\|$. Поскольку элемент $\mathrm{abs}(z)$ эрмитов, подпространство $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{abs}(z))}$ является ортогональным дополнением к подпространству $\mathrm{Ker}(\mathrm{abs}(z))$ (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1). Такнм образом, (i) доказано.

Из формулы (14) следует существование изометрического отображения v из $\mathrm{Im}\,|z|$ в $\mathrm{Im}\,z$, такого, что $z\xi = v(\mathrm{abs}(z))\xi$ для любого $\xi \in E$. Пусть u — однозначно определенный элемент пространства $\mathscr{L}(E; F)$, который является продолжением элемента v на все E и аннулирует $\mathrm{Ker}\,z$. Тогда u обладает перечисленными в (ii) свойствами. Единственность u немедленно следует из того, что $E = \mathrm{Ker}\,z \oplus \overline{(\mathrm{Im}\,\mathrm{abs}(z))}$.

Ясно, что M — начальное подпространство для u. Его конечным подпространством является $u(M) = \overline{u(\mathrm{Im}\,\mathrm{abs}(z))} = \overline{\mathrm{Im}\,z} = N$.

Пусть z_1 и u_1 обладают свойствами (iv). Имеем

$$z^*z = z_1u_1^*u_1z_1;$$

$u_1^*u_1$ — ортопроектор ядра $\mathrm{Ker}\,z_1$ (*Топ. вект. пр.*, гл. V, 2-е изд., § 1) и, значит, образа $\overline{\mathrm{Im}\,z_1}$. Поэтому $z^*z = z_1^2$, откуда $z_1 = (z^*z)^{1/2}$ (предложение 9). Но тогда u_1 совпадает с u на $\mathrm{Im}(\mathrm{abs}(z))$ и на $\mathrm{Ker}\,z$; следовательно, $u_1 = u$.

Пару $(u, \mathrm{abs}(z))$ называют *полярным разложением* элемента z.

Предложение 16. *Пусть* $(u, |z|)$ — *полярное разложение элемента* z. *Тогда*

(i) $|z| = u^* \cdot z$;

(ii) $|z^*| = u \cdot |z| \cdot u^*$;

(iii) *полярным разложением элемента* z^* *является пара* $(u^*, |z^*|)$.

Так как u^*u — ортопроектор E на $\overline{\mathrm{Im}\,|z|}$, то $u^*z = u^* \cdot u|z| = |z|$, откуда следует (i). Далее,

$$z^* = |z| \cdot u^* = (u^*u \cdot |z|) \cdot u^* = u^* \cdot (u \cdot |z| u^*).$$

С другой стороны, $u|M$ и $u^*|N$ — взаимно обратные изометрии M на N и N на M, поэтому ядром отображения $u \cdot |z| \cdot u^*$ является ортогональное дополненне к N, и элемент $u \cdot |z| \cdot u^*$ положителен. Принимая во внимание предложение 15 (iv), получаем, что $(u^*, u \cdot |z| \cdot u^*)$ — полярное разло-

жение элемента z^*. Тем самым утверждения (ii) и (iii) доказаны.

Предложение 17. *Пусть* $(u, |z|)$ *— полярное разложение элемента* z. *Для того чтобы отображение* z *было биективным, необходимо и достаточно, чтобы элемент* $|z|$ *был обратим в* $\mathscr{L}(E)$ *и чтобы отображение* u *было изоморфизмом гильбертова пространства* E *на гильбертово пространство* F.

Достаточность этого условия очевидна. С другой стороны, если отображение z биективно, то элемент z^*z, а значит, и $(z^*z)^{1/2}$ обратим в $\mathscr{L}(E)$. Кроме того, $\operatorname{Ker} z = 0$ и $\operatorname{Im} z = F$; стало быть, u — изометрическое отображение пространства E на F.

Предложение 18. *Пусть* $z \in \mathscr{L}(E)$ *и* $(u, |z|)$ *— полярное разложение элемента* z. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) z *— нормальный элемент;*

(ii) *элементы* u *и* $|z|$ *коммутируют;*

(iii) *в алгебре* $\mathscr{L}(E)$ *существует унитарный элемент* v, *коммутирующий с* $|z|$ *и такой, что* $z = v \cdot |z|$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): если элемент z нормальный, то $|z^*| = (zz^*)^{1/2} = (z^*z)^{1/2} = |z|$; следовательно, принимая во внимание предложение 16 (ii), имеем

$$|z| \cdot u = |z^*| \cdot u = u \cdot |z| \cdot u^* \cdot u = u \cdot |z|.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): если $u \cdot |z| = |z| \cdot u$, то отображение u оставляет инвариантными подпространства $\operatorname{Ker}|z|$ и $\overline{\operatorname{Im}|z|}$, ортогонально дополняющие друг друга; пусть v — элемент из $\mathscr{L}(E)$, совпадающий с u на $\overline{\operatorname{Im}|z|}$ и с тождественным отображением на $\operatorname{Ker}|z|$; тогда v — унитарный элемент, коммутирующий с $|z|$, и $z = v \cdot |z|$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): при выполнении условий (iii) имеем

$$zz^* = v \cdot |z|^2 \cdot v^* = |z|^2 \cdot vv^* = |z|^2 = z^*z.$$

§ 7. Алгебры непрерывных функций на компактном пространстве

1. Подалгебры в $\mathscr{C}(\Omega)$ (Ω—компактное пространство)

Предложение 1. *Пусть* Ω *— компактное пространство,* B *— подалгебра с единицей в* $\mathscr{C}(\Omega)$. *Предположим, что алгебра* B *снабжена нормой, относительно которой она является банаховой алгеброй.*

(i) *При канонической инъекции подалгебры* B *в* $\mathscr{C}(\Omega)$ *нормы элементов из* B *могут лишь уменьшаться.*

(ii) *B — алгебра без радикала.*

(iii) *Для каждого $t \in \Omega$ пусть $\varphi(t)$ — характер $f \mapsto f(t)$ алгебры B. Тогда φ — непрерывное отображение компакта Ω в $\mathrm{X}(B)$.*

(iv) *Если алгебра B разделяет точки компакта Ω, то отображение φ есть гомеоморфизм компакта Ω на некоторую замкнутую часть в $\mathrm{X}(B)$.*

(v) *Если $\mathrm{X}(B) = \varphi(\Omega)$, то B — наполненная подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$.*

(vi) *Если B — наполненная инволютивная подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$, то $\mathrm{X}(B) = \varphi(\Omega)$.*

(vii) *Если B — наполненная подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$ и существует элемент $a \in B$, такой, что элементы вида $f(a)$ (f — рациональная функция, не имеющая полюсов в $\mathrm{Sp}_B a$) всюду плотны в B, то $\mathrm{X}(B) = \varphi(\Omega)$.*

Отождествим Ω с $\mathrm{X}(\mathscr{C}(\Omega))$, а $\mathscr{G}_{\mathscr{C}(\Omega)}$ — с тождественным отображением (§ 3, п° 2). Тогда $\varphi = \mathrm{X}(h)$, где через h обозначена каноническая инъекция алгебры B в $\mathscr{C}(\Omega)$, и утверждение (iii) доказано. Для каждого элемента $f \in B$ и каждого $t \in \Omega$ имеем $(\mathscr{G}_B f)(\varphi(t)) = \hat{f}(t)$, откуда следуют неравенства

$$\|f\|_B \geqslant \sup |\mathscr{G}_B f| \geqslant \|f\|_{\mathscr{C}(\Omega)} \tag{1}$$

и, стало быть, утверждения (i) и (ii).

Если B разделяет точки в Ω, то отображение φ инъективно, и утверждение (iv) следует из того, что Ω — компакт. Утверждение (v) вытекает из предложения 7, § 3 и утверждения (vii) предложения 8 § 3. Предположим, наконец, что B — наполненная инволютивная подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$. Пусть $\mathfrak{J}$ — какой-нибудь максимальный идеал в B, и пусть Φ — множество элементов $t \in \Omega$, таких, что $\hat{f}(t) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{J}$. Допустим, что $\Phi = \varnothing$. Тогда существуют открытое покрытие $(V_1, \ldots, V_n)$ компакта Ω и для каждого целого $i \in [1, n]$ функция $f_i \in \mathfrak{J}$, такая, что $\hat{f}_i(t) \neq 0$ для всех $t \in V_i$. Так как алгебра B инволютивна, то

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{f}_i \in \mathfrak{J}.$$

Но элемент $\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{f}_i$ обратим в $\mathscr{C}(\Omega)$ и, стало быть, в B, так как B — наполненная подалгебра. Мы пришли к противоречию. Таким образом, множество Φ содержит по крайней мере одну точку t_0. Ядро соответствующего этой точке характера алгебры B содержит $\mathfrak{J}$ и, следовательно, совпадает с $\mathfrak{J}$. Поэтому каждая точка пространства $\mathrm{X}(B)$ является образом некоторой точки компакта Ω при отображении φ.

Пример. Пусть $\Omega = (0, 1)$, B — алгебра функций $f: \Omega \to \mathbf{C}$, имеющих на $(0, 1)$ непрерывные производные вплоть до порядка n, снабженная нормой, рассмотренной в примере 2 § 2. Ясно, что B — наполненная инволютивная подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$, разделяющая точки Ω, следовательно, $X(B)$ отождествляется с Ω.

Предложение 2. *Пусть Ω — компактное пространство, B — банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{C}(\Omega)$ (с индуцированной нормой), разделяющая точки Ω. Отождествим Ω с замкнутой частью пространства $X(B) = \Omega'$.*

(i) *Для каждого элемента $f \in B$ функция $\mathscr{G}_B f$ является продолжением функции f на Ω' и $\|f\| = \sup |\mathscr{G}_B f|$, так что $\mathscr{G}_B$ — изометрический изоморфизм алгебры B на некоторую банахову подалгебру в $\mathscr{C}(\Omega')$.*

(ii) *Пусть B^* — множество обратимых элементов алгебры B. Для каждого характера $\chi \in \Omega'$ существует положительная мера μ с массой 1 на Ω, такая, что для каждого элемента $f \in B^*$ имеет место равенство*

$$\log |\chi(f)| = \int_\Omega \log |f(\omega)| \, d\mu(\omega).$$

(iii) *Если χ и μ удовлетворяют условиям* (ii), *то для каждого элемента $f \in B$ имеет место равенство*

$$\chi(f) = \int_\Omega f(\omega) \, d\mu(\omega).$$

(iv) *Предположим, что любой элемент из $\mathscr{C}_R(\Omega)$ является равномерным пределом вещественных частей функций из B. Тогда для любого характера $\chi \in \Omega'$ существует и притом единственная мера $\mu_\chi \geqslant 0$ на Ω, такая, что для каждой функции $f \in B$ имеет место равенство*

$$\chi(f) = \int_\Omega f(\omega) \, d\mu_\chi(\omega).$$

Кроме того, для каждой функции $f \in B$ справедливо неравенство

$$\log |\chi(f)| \leqslant \int_\Omega \log |f(\omega)| \, d\mu_\chi(\omega).$$

(Здесь удобно считать $\log 0 = -\infty$. Функция $\log |f|$ ограниченна сверху, и поэтому ее интеграл либо конечен, либо равен $-\infty$.)

Утверждение (i) вытекает из неравенства (1).

Пусть $\chi \in \Omega'$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ и $f_1, \ldots, f_n \in B^*$. Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log|\chi(f_i)| \leqslant \sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log|f_i(\omega)|.$$

В силу непрерывности достаточно доказать это неравенство для случая, когда числа λ_i рациональны и, стало быть, после приведения их к одному и тому же знаменателю, — для случая, когда $\lambda_i \in \mathbf{Z}$ для всех i. Но в этом случае неравенство может быть переписано следующим образом:

$$\log\left|\chi\left(f_1^{\lambda_1} \ldots f_n^{\lambda_n}\right)\right| \leqslant \sup_{\omega \in \Omega} \log\left|\left(f_1^{\lambda_1} \ldots f_n^{\lambda_n}\right)(\omega)\right|,$$

и его справедливость вытекает из того, что $\|\chi\| = 1$.

Пусть B' — векторное подпространство в $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$, порожденное функциями вида $\log|f|$, где $f \in B^*$. Предыдущие рассуждения доказывают существование линейной формы h с нормой $\leqslant 1$ на B', такой, что $\log|\chi(f)| = h(\log|f|)$ для всех $f \in B^*$. Далее, h можно продолжить до линейной формы μ с нормой $\leqslant 1$ на все $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$; этому продолжению соответствует вещественная мера μ на Ω, такая, что $\|\mu\| \leqslant 1$. Выбирая в качестве элемента f из B^* постоянную $e\,(=\exp 1)$, получим $1 = \mu(1)$. Следовательно,

$$1 = \mu^+(1) - \mu^-(1) \leqslant \mu^+(1) + \mu^-(1) = \|\mu\| \leqslant 1$$

и, значит, $\mu = \mu^+ \geqslant 0$ и $\|\mu\| = 1$; тем самым (ii) доказано.

Предположим, что χ и μ обладают свойствами (ii). Для любого элемента $f \in B$ имеем $\exp f \in B^*$, следовательно,

$$\int_{\Omega} \mathscr{R}(f)\, d\mu = \int \log|\exp f|\, d\mu = \log|\chi(\exp f)| =$$

$$= \log|\exp \chi(f)| = \mathscr{R}\chi(f).$$

Заменяя f на if, мы видим, что $\int_{\Omega} f\, d\mu = \chi(f)$ для любого элемента $f \in B$.

Допустим теперь, что выполняются предположения (iv). Существование μ_χ вытекает из (ii) и (iii). С другой стороны, для каждой функции $f \in B$ справедливо равенство $\mu_\chi(\mathscr{R}f) = \mathscr{R}(\chi(f))$ и, поскольку $\mathscr{R}(B)$ плотно в пространстве $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$, характер χ однозначно определяет меру μ_χ. Пусть $f \in B$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in B$, такая, что

$$\mathscr{R}g - \varepsilon \leqslant \log(|f| + \varepsilon) \leqslant \mathscr{R}g + \varepsilon. \tag{2}$$

Пусть $h = \exp g \in B^*$. Из (2) следует, что

$$|h|e^{-\varepsilon} \leqslant |f| + \varepsilon, \tag{3}$$

$$|f| + \varepsilon \leqslant |h|e^{\varepsilon}. \tag{4}$$

Из (4) видно, что $|fh^{-1}| \leqslant e^{\varepsilon}$ и, значит, $|\chi(fh^{-1})| \leqslant e^{\varepsilon}$. Поэтому

$$\log|\chi(f)| \leqslant \log|\chi(h)| + \varepsilon = \int_{\Omega} \log|h|\, d\mu_{\chi} + \varepsilon. \tag{5}$$

Из (3) и (5) получается неравенство

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_{\Omega} \log(|f| + \varepsilon)\, d\mu_{\chi} + 2\varepsilon, \tag{6}$$

из которого, поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, выводим, что

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_{\Omega} \log|f|\, d\mu_{\chi}.$$

Рассмотрим теперь «конкретную» реализацию объектов Ω, B, Ω', $\mathscr{G}_B$ предложения 2.

Пусть Λ — некоторое множество, Ω_1 — компактная часть $\mathbf{C}^{\Lambda}$. Обозначим через $P(\Omega_1)$ банахову подалгебру с единицей в $\mathscr{C}(\Omega_1)$, состоящую из функций на Ω_1, которые являются равномерными пределами многочленов на Ω_1. Координатные функции $z_\lambda|\Omega_1$ топологически порождают алгебру $P(\Omega_1)$, и $P(\Omega_1)$ разделяет точки Ω_1. Пусть Ω_1' — полиномиально выпуклая оболочка Ω_1. Так как для каждого элемента $p \in \mathbf{C}[(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}]$ справедливо равенство

$$\sup_{z \in \Omega_1'} |p(z)| = \sup_{z \in \Omega_1} |p(z)|,$$

то равномерно сходящиеся последовательности многочленов на Ω_1 единственным образом продолжаются до равномерно сходящихся последовательностей многочленов на Ω_1'; стало быть, существует и притом единственный изометрический изоморфизм $P(\Omega_1)$ на $P(\Omega_1')$, который для каждой координатной функции z_λ на $\mathbf{C}^{\Lambda}$ преобразует $z_\lambda|\Omega_1$ в $z_\lambda|\Omega_1'$. Такой изоморфизм мы будем называть каноническим. Имеет место

Предложение 3. *Пусть, в дополнение к условиям предложения 2, (x_λ) — семейство элементов, топологически порождающих алгебру с единицей B. Положим $A = \mathscr{C}(\Omega)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{i} & \Omega' \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} \\ \mathrm{Sp}_A((x_\lambda)) & \xrightarrow{I} & \mathrm{Sp}_B((x_\lambda)) \end{array}$$

где φ, φ' — *отображения, определенные семейством* (x_λ), i *и* j — *канонические инъекции. Тогда*

(i) φ *и* φ' — *гомеоморфизмы*;

(ii) $\mathrm{Sp}_B((x_\lambda))$ *является полиномиально выпуклой оболочкой* $\mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$;

(iii) φ *преобразует алгебру* A *в* $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A((x_\lambda)))$, *а* B — *в* $P(\mathrm{Sp}_A((x_\lambda)))$;

(iv) φ' *преобразует* $\mathscr{G}_B(B)$ *в* $P(\mathrm{Sp}_B((x_\lambda)))$;

(v) φ *и* φ' *преобразуют* $\mathscr{G}_B$ *в канонический изоморфизм из* $P(\mathrm{Sp}_A((x_\lambda)))$ *на* $P(\mathrm{Sp}_B((x_\lambda)))$.

Напомним, что φ и φ' непрерывны и сюръективны. В данной ситуации отображение φ' биективно (§ 3, предложение 9(i)), а i инъективно; стало быть, отображение φ инъективно. Поэтому φ и φ' — гомеоморфизмы. Полиномиально выпуклая оболочка компакта $\Omega_1 = \mathrm{Sp}_A((x_\lambda))$ совпадает с множеством $\Omega_1' = \mathrm{Sp}_B((x_\lambda))$ в силу следствия 1 предложения 9, § 3. Обозначим через z_λ $(\lambda \in \Lambda)$ координатные функции на $\mathbf{C}^\Lambda$. Ясно, что φ преобразует x_λ в $z_\lambda | \Omega_1$ и что φ' преобразует $\mathscr{G}_B x_\lambda$ в $z_\lambda | \Omega_1'$; следовательно, φ и φ' преобразуют B в $P(\Omega_1)$, $\mathscr{G}_B(B)$ в $P(\Omega_1')$ и $\mathscr{G}_B$ — в канонический изоморфизм из $P(\Omega_1)$ в $P(\Omega_1')$.

2. *Случай* $\Omega \subset \mathbf{C}^\Lambda$

Пусть Λ — некоторое множество, Ω — компактная часть $\mathbf{C}^\Lambda$. Так как $P(\Omega)$ разделяет точки компакта Ω, то последний можно отождествить с некоторой частью пространства $\mathrm{X}(P(\Omega))$. Пусть по-прежнему z_λ — координатные функции на $\mathbf{C}^\Lambda$.

Предложение 4. (i) *Отображение* $\mathrm{X}(P(\Omega))$ *на* $\mathrm{Sp}_{P(\Omega)}((z_\lambda))$, *определенное семейством* (z_λ), *представляет собой гомеоморфизм* θ *пространства* $\mathrm{X}(P(\Omega))$ *на полиномиально выпуклую оболочку* Ω' *компакта* Ω, *тождественный на* Ω.

(ii) *Для каждой функции* $f \in P(\Omega)$ *гомеоморфизм* θ *преобразует продолжение* $\mathscr{G}_{P(\Omega)} f$ *функции* f *на* $\mathrm{X}(P(\Omega))$ *в продолжение* $\tilde{f}$ *функции* f *на* Ω'; *при этом отображение* $f \mapsto \tilde{f}$ *является каноническим изоморфизмом* $P(\Omega)$ *на* $P(\Omega')$.

Предложение 4 сводится к предложению 3, если положить $B = P(\Omega)$ и $x_\lambda = z_\lambda$ и заметить, что тогда отображение φ превращается в тождественное.

Следствие. *Если* Ω *связно, то его полиномиально выпуклая оболочка также связна.*

Если Ω связно, то единственными идемпотентами в $\mathscr{C}(\Omega)$ и, стало быть, в $P(\Omega)$ являются 0 и 1. Поэтому $X(P(\Omega))$ связно (§ 4, предложение 12) и, значит, полиномиально выпуклая оболочка компакта Ω связна (предложение 4 (i)).

3. *Случай* $\Omega \subset \mathbf{C}$

Пусть Ω — компактная часть в $\mathbf{C}$, O_∞ — неограниченная компонента связности множества $\mathbf{C} - \Omega$, $(O_i)_{i \in I}$ — семейство ограниченных компонент связности (O_i предполагаются попарно различными). Пусть, наконец, E — некоторая часть в $\mathbf{C} - \Omega$. Обозначим через $R_E(\Omega)$ замыкание в пространстве $\mathscr{C}(\Omega)$ множества сужений $f|\Omega$, где f — рациональная функция, все полюсы которой расположены в E. Это замыкание есть банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{C}(\Omega)$, которая разделяет точки Ω. Пусть z — тождественная функция на Ω. Тогда наполненная замкнутая подалгебра в $R_E(\Omega)$, порожденная элементом z, совпадает с $R_E(\Omega)$. Элементы из $R_E(\Omega)$ голоморфны во всех внутренних точках компакта Ω.

В частности, $R_\varnothing(\Omega) = P(\Omega)$. Положим $R_{\mathbf{C}-\Omega}(\Omega) = R(\Omega)$. Обозначим через $I(E)$ множество всех $i \in I$, таких, что $E \cap O_i = \varnothing$, а через Ω_E — множество $\Omega \cup \left(\bigcup_{i \in I(E)} O_i \right)$; множество Ω_E, будучи ограниченным и замкнутым (его дополнение в $\mathbf{C}$ открыто), компактно.

Предложение 5. (i) *Отображение сужения*

$$R_E(\Omega_E) \to R_E(\Omega)$$

является изометрическим изоморфизмом из $R_E(\Omega_E)$ *на* $R_E(\Omega)$.

(ii) $R_E(\Omega_E)$ — *наполненная подалгебра в* $\mathscr{C}(\Omega_E)$.

(iii) *Каждый характер алгебры* $R_E(\Omega_E)$ *определяется некоторой точкой из* Ω_E.

(iv) *Отображение* $\chi \mapsto \chi(z)$ *есть гомеоморфизм из* $X(R_E(\Omega))$ *на* Ω_E.

(v) *Если* E' — *некоторая часть* $\mathbf{C} - \Omega$, *то следующие условия эквивалентны*:

(a) $R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega)$; (b) $\Omega_E = \Omega_{E'}$; (c) $I(E) = I(E')$.

Ясно, что отображение сужения h из $R_E(\Omega_E)$ в $R_E(\Omega)$ является морфизмом. Поскольку граница множества Ω_E содержится в Ω, то, как следует из принципа максимума, морфизм h изометричен. Покажем, что он сюръективен. Пусть $g \in R_E(\Omega)$. Тогда существует последовательность f_n рациональных функций, все полюсы которых расположены в E, равномерно сходящаяся к функции g на Ω. Функции f_n голоморфны в Ω_E, и граница множества Ω_E содержится в Ω;

следовательно, в силу принципа максимума, последовательность f_n равномерно сходится на Ω_E к некоторой функции f из $R_E(\Omega_E)$ и $g = f|\Omega$. Таким образом, (i) доказано.

Пусть z_E — тождественное отображение множества Ω_E. В силу следствия предложения 6, § 2, множество $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)} z_E$ есть объединение множеств $\mathrm{Sp}_{\mathscr{C}(\Omega_E)} z_E = \Omega_E$ и соответствующих компонент связности дополнения к Ω_E; если O_i — одна из них, то существует точка $\lambda \in E \cap O_i$; так как $(\lambda - z_E)^{-1} \in R_E(\Omega_E)$, то $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)} z_E$ и, стало быть, O_i не содержится в $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)} z_E$. Таким образом, $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)} z_E = \Omega_E$. В то же время, в силу (i), $\mathrm{Sp}_{R_E(\Omega)} z = \mathrm{Sp}_{R_E(\Omega_E)} z_E$. Тем самым утверждение (iv) доказано, а утверждения (ii) и (iii) вытекают из предложения 8, § 3, если воспользоваться канонической инъекцией $R_E(\Omega_E)$ в $\mathscr{C}(\Omega_E)$. Докажем утверждение (v); очевидно, что (b) $\Leftrightarrow$ (c); в силу (iv), (a) $\Rightarrow$ (b). Допустим, что $\Omega_E = \Omega_{E'}$, и покажем, что $R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega)$; так как $\Omega_E = \Omega_{E'} = \Omega_{E \cup E'}$, то можно считать, что $E \subset E'$; в силу (ii), $R_E(\Omega_E)$ — наполненная замкнутая подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega_E)$ и, стало быть, в $R_{E'}(\Omega_E)$, содержащая z_E. Поэтому

$$R_E(\Omega_E) = R_{E'}(\Omega_E)$$

и, в силу (i),

$$R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega).$$

Следствие 1. *Следующие условия эквивалентны*:

(a) *E имеет непустое пересечение со всеми множествами O_i.*

(b) *Отображение $\chi \mapsto \chi(z)$ является гомеоморфизмом пространства $\mathfrak{X}(R_E(\Omega))$ на Ω.*

(c) $R_E(\Omega) = R(\Omega)$.

Пусть $E' = \mathbf{C} - \Omega$. Условия (a), (b) и (c) соответственно эквивалентны условиям $I(E) = I(E')$, $\Omega_E = \Omega_{E'}$ (в силу предложения 5 (iv)), $R_E(\Omega) = R_{E'}(\Omega)$. Поэтому наше утверждение вытекает из предложения 5 (v).

Следствие 2. *Пусть для каждого $i \in I$ выбрана точка $\lambda_i \in O_i$. Пусть f — комплексная голоморфная функция в некоторой открытой окрестности Ω. Тогда $f|\Omega$ является равномерным пределом сужений на Ω рациональных функций, полюсы которых расположены в точках λ_i.*

Это вытекает из следствия 1 и предложения 4, § 4.

Пусть Λ — некоторое множество, Φ — часть в $\mathbf{C}^{\Lambda}$. Ясно, что следующие условия эквивалентны:

(i) Часть Φ представляет собой множество точек $(c_\lambda)\in\mathbf{C}^{\Lambda}$, для которых существуют конечное или бесконечное семейство (P_i) элементов из $\mathbf{C}[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$ и семейство (M_i) вещественных чисел, такие, что $|P_i((c_\lambda))|\leqslant M_i$.

(ii) Для того чтобы точка (c_λ) из $\mathbf{C}^{\Lambda}$ принадлежала Φ, необходимо и достаточно, чтобы $|P((c_\lambda))|\leqslant \sup\limits_{c\in\Phi}|P(c)|$ для всех $P\in\mathbf{C}[(X_\lambda)]$.

Такая часть в $\mathbf{C}^{\Lambda}$ называется *полиномиально выпуклой*. Любое пересечение полиномиально выпуклых частей в $\mathbf{C}^{\Lambda}$ полиномиально выпукло. Стало быть, какова бы ни была часть Ψ в $\mathbf{C}^{\Lambda}$, существует наименьшая полиномиально выпуклая часть Φ в $\mathbf{C}^{\Lambda}$, содержащая Ψ. Говорят, что Φ — *полиномиально выпуклая оболочка* части Ψ. Она представляет собой множество всех точек $(c_\lambda)\in\mathbf{C}^{\Lambda}$, таких, что $|P((c_\lambda))|\leqslant \sup\limits_{c\in\Psi}|P(c)|$ для всех $P\in\mathbf{C}[(X_\lambda)]$.

Если часть Ψ замкнута, то $\mathbf{C}^{\Lambda}-\Psi$ открыто и, стало быть, локально связно; поэтому каждая его компонента связности открыта. Если к тому же множество Λ конечно, то из принципа максимума следует, что каждая ограниченная связная компонента $\mathbf{C}^{\Lambda}-\Psi$ содержится в Φ.

Пусть Λ' — некоторая часть в Λ, $\Psi'=\mathrm{pr}_{\Lambda'}\Psi$ и Φ' — полиномиально выпуклая оболочка части Ψ' в $\mathbf{C}^{\Lambda'}$. Поскольку каждый элемент из $\mathbf{C}[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}]$ отождествляется с некоторым элементом из $\mathbf{C}[(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}]$, справедливо соотношение $\Phi'\supset\mathrm{pr}_{\Lambda'}\Phi$.

Лемма 1. *Пусть $\Phi\subset\mathbf{C}^{\Lambda}$ — компактная полиномиально выпуклая часть, Ω — некоторая ее окрестность. Тогда существует конечная часть Λ_0 в Λ, такая, что для каждой части Λ' из Λ, содержащей Λ_0, $\mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Omega)$ содержит полиномиально выпуклую оболочку части $\mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Phi)$.*

Поскольку Φ — компакт, Φ содержится в произведении компактных кругов D_λ с центром в 0 радиусов R_λ $(\lambda\in\Lambda)$.

Для каждого многочлена $P \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$ пусть Φ_P — множество всех $d \in \mathbf{C}^\Lambda$, таких, что

$$|P(d)| \leqslant \sup_{c \in \Phi} |P(c)|.$$

Имеем

$$\Phi = \left(\prod_\lambda D_\lambda\right) \cap \left(\bigcap_P \Phi_P\right) \subset \Omega. \tag{1}$$

Так как $\prod_\lambda D_\lambda$ — компакт, то существуют многочлены $P_1, \ldots, P_q \in \mathbf{C}[(X_\lambda)]$, такие, что

$$\left(\prod_\lambda D_\lambda\right) \cap \Phi_{P_1} \cap \ldots \cap \Phi_{P_q} \subset \Omega. \tag{2}$$

Пусть Λ_0 — множество индексов тех переменных, которые фактически присутствуют в $P_1, \ldots, P_q$. Пусть Λ' — некоторая часть Λ, содержащая Λ_0. Пусть E — часть $\mathbf{C}^{\Lambda'}$, определенная неравенствами $|c_\lambda| \leqslant R_\lambda (\lambda \in \Lambda')$ и $|P_i((c_\lambda))| \leqslant \sup_{c \in \Phi} |P_i(c)|$ $(i = 1, \ldots, q)$. Тогда E — полиномиально выпуклая часть. В силу (1), $\mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Phi) \subset E$. С другой стороны, пусть $(c_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'} \in E$; пусть, далее, $(d_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — элемент из $\mathbf{C}^\Lambda$, определенный следующим образом: $d_\lambda = c_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda'$, $d_\lambda = 0$ для $\lambda \in \Lambda - \Lambda'$; тогда, в силу (2), $(d_\lambda) \in \Omega$, стало быть, $(c_\lambda) \in \mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Omega)$. Таким образом, $E \subset \mathrm{pr}_{\Lambda'}(\Omega)$, чем и завершается доказательство.

Лемма 2. *Пусть $n > 0$ — целое число и Φ — полиномиально выпуклая компактная часть в $\mathbf{C}^n$. Тогда Φ обладает фундаментальной системой полиномиально выпуклых компактных окрестностей.*

Существуют компактный полицилиндр Δ в $\mathbf{C}^n$, внутренность которого содержит Φ, и семейство $(P_i)_{i \in I}$ элементов из $\mathbf{C}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$, таких, что Φ представляет собой множество тех точек $(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta$, для которых

$$|P_i(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant M_i$$

при всех i. Для каждой конечной части J множества I и любого $\varepsilon > 0$ пусть $\Phi_{J,\varepsilon}$ — множество всех $(z_1, \ldots, z_n) \in \Delta$, таких, что $|P_i(z_1, \ldots, z_n)| \leqslant M_i + \varepsilon$ для всех $i \in J$. Тогда каждое множество $\Phi_{J,\varepsilon}$ есть полиномиально выпуклая компактная окрестность части Φ и пересечение всех $\Phi_{J,\varepsilon}$ совпадает с Φ. Стало быть, $\Phi_{J,\varepsilon}$ образуют фундаментальную систему окрестностей части Φ (*Общ. топ.*, гл. I, 4-е изд., § 9, теорема 1).

§ 1

1) Пусть (e_1, e_2) — канонический базис в $\mathbf{R}^2$ и u — элемент алгебры $A = \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$, определенный равенствами $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = -e_1$. Показать, что

$$\mathrm{Sp}_A u = \varnothing, \quad \mathrm{Sp}_A u^2 = \{-1\}.$$

2) Пусть μ — мера Лебега на $(0, 1)$, H — гильбертово пространство $L^2_{\mathbf{C}}((0, 1), \mu)$, $A = \mathscr{L}(H)$ и $x \in A$ — оператор, который преобразует функцию $f(t)$ в функцию $tf(t)$. Показать, что $\mathrm{Sp}_A x = (0, 1)$, но оператор x не имеет ни одного собственного значения.

3) a) Пусть H — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ и $A = \mathscr{L}(H)$. Рассмотрим оператор $T \in \mathscr{L}(H)$, такой, что $T\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ для всех $i \geqslant 0$, и оператор $T' \in \mathscr{L}(H)$, такой, что $T'\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}$ для $i \geqslant 1$ и $T'\varepsilon_0 = 0$. Показать, что $T'T = 1$, но $TT'\varepsilon_0 = 0$, так что $\mathrm{Sp}_A(T'T) \neq \mathrm{Sp}_A(TT')$.

b) Пусть A — нётерова алгебра с единицей над некоторым полем. Показать, что если $x, y \in A$, то $\mathrm{Sp}(xy) = \mathrm{Sp}(yx)$ (использовать упражнение 8 b) из *Алг.*, гл. VIII, § 2).

4) Пусть A — коммутативная алгебра над $\mathbf{C}$, $\mathfrak{J}$ — идеал в A, h — каноническая инъекция $\mathfrak{J}$ в A, S — множество характеров $\chi \in \mathrm{X}'(A)$, которые аннулируют $\mathfrak{J}$.

a) Показать, что отображение $\mathrm{X}'(h)$ сюръективно.

b) Показать, что отображение $\mathrm{X}'(h) | (\mathrm{X}'(A) - S)$ является гомеоморфизмом из $\mathrm{X}'(A) - S$ на $\mathrm{X}(\mathfrak{J})$. (Пусть $\chi_0 \in \mathrm{X}'(A) - S$. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in A$, $\varepsilon > 0$ и V — окрестность точки χ_0 в $\mathrm{X}'(A)$, определенная неравенствами $|(\chi - \chi_0)(x_i)| \leqslant \varepsilon (i = 1, \ldots, n)$. Пусть элемент $u_0 \in \mathfrak{J}$ таков, что $\chi_0(u_0) = 1$. Положим $u_i = u_0 x_i \in \mathfrak{J}$. Тогда если $|(\chi - \chi_0)(u_i)| \leqslant \delta$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, где δ достаточно мало, то $\chi \in V$.)

5) В упражнении 4 выберем $A = \mathbf{C}[X, Y]$, $\mathfrak{J} = AX$. Пространство $\mathrm{X}(A)$ отождествляется тогда с $\mathbf{C}^2$, $S - \{0\}$ — с $\{0\} \times \mathbf{C}$. Пусть U — множество точек $(\xi, \eta) \in \mathbf{C}^2$, таких, что $|\xi| < e^{-|\eta|}$. Показать, что $\mathrm{X}'(h)(U)$ не является окрестностью нуля в $\mathrm{X}'(\mathfrak{J})$. Вывести отсюда, что $\mathrm{X}'(\mathfrak{J})$ нельзя отождествить с факторпространством $\mathrm{X}'(A)$ по отношению эквивалентности, которое определяется отображением $\mathrm{X}'(h)$. (По этому поводу см. § 3, упр. 17.)

6) Предположим, что A — коммутативная алгебра над полем, $\mathfrak{J}$ — ее максимальный идеал. Показать, что либо $A^2 \subset \mathfrak{J}$ и $\dim A/\mathfrak{J} = 1$, либо $A/\mathfrak{J}$ является телом. (Применить к факторалгебре $A/\mathfrak{J}$ упражнение 3 из *Алг.*, гл. I, § 9.) В частности, если $A^2 = A$, то каждый максимальный идеал в A регулярен.

7) Пусть A — коммутативная алгебра над полем K, $x \in A$ и $\alpha \in K$. Показать, что множество характеров $\chi \in \mathrm{X}(A)$, таких, что $(\mathscr{G}x)(\chi) = \alpha$, замкнуто в топологии Джекобсона. (Это утверждение может быть сведено к случаю, когда A содержит единичный элемент, а затем к случаю $\alpha = 0$.)

¶ 8) Пусть A — некоторая алгебра, $\mathfrak{J}$ — двусторонний идеал в A, $J^{\mathfrak{J}}(A)$ — множество всех примитивных идеалов в A, которые не содержат $\mathfrak{J}$, и $\hat{A}^{\mathfrak{J}}$ — множество всех отображений $\pi \in \hat{A}$, таких, что $\pi(\mathfrak{J}) \neq 0$.

a) Показать, что если $\pi \in \hat{A}^{\mathfrak{J}}$, то $\pi|\mathfrak{J} \in \hat{\mathfrak{J}}$ (лемма 1 (i)). Если отображения π, $\pi' \in \hat{A}$ таковы, что $\pi|\mathfrak{J}$ и $\pi'|\mathfrak{J}$ эквивалентны, то π и π' эквивалентны. (Можно считать, что $\pi(x) = \pi'(x)$ для всех $x \in \mathfrak{J}$. Тогда для каждого элемента $y \in A$ значении $\pi(y)$ и $\pi'(y)$ совпадают на $\sum_{x \in \mathfrak{J}} \operatorname{Im} \pi(x)$, а это подпространство совпадает с пространством представления π.)

b) Показать, что если $\pi \in \hat{\mathfrak{J}}$, то π продолжается до некоторого элемента из $\hat{A}^{\mathfrak{J}}$. (Пусть $\mathfrak{N}$ — регулярный максимальный левый идеал в $\mathfrak{J}$. Пусть g — какая-нибудь правая единица в $\mathfrak{J}$ по модулю $\mathfrak{N}$. Предполагая, что A содержит единичный элемент, показать, что соотношение $A\mathfrak{N} + A(1-g) = A$ влечет за собой $g^2 \in \mathfrak{N}$. Стало быть, $A\mathfrak{N} + A(1-g)$ содержится в некотором максимальном левом идеале $\mathfrak{M}$ из A. Показать, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{J} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} + \mathfrak{J} = A$.)

c) Вывести из a) и b), что отображение $\mathfrak{J}' \longmapsto \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{J}$ является гомеоморфизмом $J^{\mathfrak{J}}(A)$ на $J(\mathfrak{J})$ и что отображение $\pi \to \pi|\mathfrak{J}$ является гомеоморфизмом $\hat{A}^{\mathfrak{J}}$ на $\hat{\mathfrak{J}}$.

§ 2

1) Пусть A — алгебра непрерывных комплексных функций на $\mathbf{R}$, стремящихся к 0 на бесконечности, снабженная нормой $\|f\| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$. Показать, что тогда $\tilde{A}$ отождествляется с алгеброй непрерывных комплексных функций, стремящихся к некоторому конечному пределу на бесконечности. Показать, что норма $\|g\| = \sup_{t \in \mathbf{R}} |g(t)|$ на $\tilde{A}$ отлична от нормы, определенной в n° 1.

2) Пусть A — нормированная алгебра и $b = \inf_{x \neq 0} (\|x^2\|/\|x\|^2)$. Показать, что тогда

$$b \leqslant \inf_{x \neq 0} (\rho(x)/\|x\|) \leqslant \sqrt{b}.$$

3) Показать, что если A — нормированная алгебра и x, $y \in A$, то $\rho(xy) = \rho(yx)$.

4) Пусть H — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $(f_1, f_2, \ldots)$. Пусть A — нормированная алгебра $\mathscr{L}(H)$. Пусть, далее, отображение $x \in A$ определено равенствами $x(f_i) = 2^{-i} f_{i+1}$. Показать, что x — квазинильпотентный элемент в A, не являющийся нильпотентным.

¶ 5) Пусть H — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $(f_1, f_2, \ldots)$. Определим числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ равенствами $\alpha_m = e^{-k}$, если m представляется в виде произведения 2^k на нечетное число. Определим отображение $x \in \mathscr{L}(H)$ с помощью равенств

$$x(f_m) = \alpha_m f_{m+1}.$$

Показать, что x не является квазнильпотентным. (Заметить, что

$$\|x^n\| = \sup_m (\alpha_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_{m+n-1}),$$

и оценить $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{2^t-1}$.) Пусть $x_k \in \mathscr{L}(H)$ определены равенствами $x_k(f_m) = 0$, если m представляется в виде произведения 2^k на нечетное число, и $x_k(f_m) = \alpha_m f_{m+1}$ в противном случае. Показать, что x_k нильпотентны и что $\| x - x_k \|$ стремится к 0.

6) Пусть K — компактная часть $\mathbf{C}$; A — банахова алгебра непрерывных функций на K, снабженная нормой $\|f\| = \sup_{t \in K} |f(t)|$; f_0 — элемент вида $z \longmapsto z$ в A. Показать, что $\mathrm{Sp}_A f_0 = K$.

7) Пусть A — банахова алгебра с единицей. Пусть элемент $x \in A$ таков, что $\|x - 1\| < 1$. Показать, что существует элемент $y \in A$, для которого $y^2 = x$. (Использовать разложение в ряд.)

8) Пусть A — нормированная алгебра с единицей. Показать, что если $\| x^{-1} \| = \|x\|^{-1}$ для любого обратимого элемента $x \in A$, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$. (Этот результат сводится к случаю, когда алгебра A полна. Пусть расстояние от элемента $x \in A$ до множества $\mathbf{C} \cdot 1$ равно $\alpha > 0$. Если $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ таково, что элемент $x - \lambda_0$ обратим, то элемент $x - \lambda$ обратим при $|\lambda - \lambda_0| < \alpha$. Отсюда можно вывести, что спектр такого элемента x пуст.)

9) Пусть A — нормированная алгебра с единицей, в которой единственный левый топологический делитель нуля есть 0 и единственный правый топологический делитель нуля есть 0. Показать, что тогда $A = \mathbf{C} \cdot 1$. (Если $x \in A$ и λ — точка границы $\mathrm{Sp}_{\widehat{A}} x$, то $x - \lambda$ — топологический делитель нуля в $\widehat{A}$ и, стало быть, в A. Следовательно, $x = \lambda$.)

10) Пусть A — нормированная алгебра. Для каждого элемента $x \in A$ положим

$$\lambda(x) = \inf_{y \neq 0} (\|xy\|/\|y\|), \qquad \lambda'(x) = \inf_{y \neq 0} (\|yx\|/\|y\|).$$

Доказать справедливость неравенств

$$|\lambda(x) - \lambda(y)| \leqslant \|x - y\|, \qquad |\lambda'(x) - \lambda'(y)| \leqslant \|x - y\|,$$
$$\lambda(x)\lambda(y) \leqslant \lambda(xy) \leqslant \|x\|\lambda(y), \qquad \lambda'(x)\lambda'(y) \leqslant \lambda'(xy) \leqslant \lambda'(x)\|y\|.$$

Вывести отсюда, что множество левых (соответственно правых) топологических делителей нуля замкнуто.

11) Пусть A — банахова алгебра с единицей. Показать, что множество всех необратимых элементов в A, не являющихся топологическими делителями нуля, открыто в A.

12) Пусть X — комплексное банахово пространство, и пусть $x \in A = \mathscr{L}(X)$. Показать, что если x не обратим, то x — левый или правый топологический делитель нуля. (Последовательно рассмотреть случаи:

1°) отображение x не инъективно;

2°) $\overline{x(X)} \neq X$;

3°) x — инъективное отображение, $x(X)$ всюду плотно в X и отлично от X.) Показать, что если x — взаимно непрерывное отображение пространства X на замкнутое подпространство в X, отличное от X, или если x не инъективно отображает X на все X, то x является внутренней точкой множества необратимых элементов в A.

13) Показать, что в алгебре A из примера 5 п° 2 функция z не является ни обратимым элементом, ни топологическим делителем нуля.

14) Пусть A — нормированная алгебра с единицей и $B = \mathscr{L}(A)$. Показать, что образ алгебры A при морфизме $x \longmapsto L_x$ является наполненной подалгеброй в B. (Использовать *Алг.*, гл. VIII, § 1, предл. 4.) Следовательно, если $x \in A$, то $\mathrm{Sp}_A x = \mathrm{Sp}_B L_x$.

¶ 15) Пусть A — банахова алгебра.

a) Пусть S — множество ограниченных последовательностей элементов из A с нормой $\|(x_n)\| = \sup \|x_n\|$. Пусть $\mathfrak{N}$ — множество последовательностей $(x_n) \in S$ таких, что $\|x_n\|$ стремится к нулю. Показать, что S — банахова алгебра, а $\mathfrak{N}$ — двусторонний замкнутый идеал в S. Пусть $\varphi\colon S \to S' = S/\mathfrak{N}$ — канонический морфизм. Показать, что тогда отображение $x \longmapsto \varphi(x, x, x, \ldots) = \theta(x)$ является изометрическим изоморфизмом алгебры A на некоторую подалгебру в S'. Показать далее, что каждый левый топологический делитель нуля в S' является также левым делителем нуля. Для того чтобы элемент $x \in A$ был левым топологическим делителем нуля, необходимо и достаточно, чтобы элемент $\theta(x)$ был левым делителем нуля в S'.

b) Предположим, что A содержит единичный элемент. Показать, что существуют некоторая банахова алгебра B и изометрический изоморфизм алгебры A на некоторую подалгебру в B, такие, что элемент из A необратим в том и только в том случае, если его образ в B является левым или правым делителем нуля. (Использовать а) и упражнения 12 и 14.)

16) а) Пусть A — нормированная алгебра, $\mathfrak{N}$ — ее радикал. Показать, что если $x \in \mathfrak{N}$, то x — квазинильпотентный элемент. (Имеем $\mathrm{Sp}'_A x = \{0\}$ и тем более $\mathrm{Sp}'_{\mathfrak{N}} x = \{0\}$.)

b) Пусть A — банахова алгебра, $\mathfrak{N}$ — ее радикал, $\mathfrak{J}$ — левый идеал в A, все элементы которого квазинильпотентны. Показать, что тогда $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{N}$. (Можно предполагать, что алгебра A содержит единичный элемент. Если $x \in \mathfrak{J}$ и $a \in A$, то $\mathrm{Sp}(ax) = \{0\}$; следовательно, элемент $1 - ax$ обратим и, значит, $x \in \mathfrak{N}$.)

17) Предположим, что A — банахова алгебра, B — алгебра над $\mathbf{C}$ без радикала, φ — морфизм из A в B. Показать, что ядро морфизма φ замкнуто. (Это ядро является пересечением регулярных максимальных левых идеалов.)

18) Пусть A — банахова алгебра, π — ненулевое неприводимое представление алгебры A в комплексном векторном пространстве X. Пусть ξ_0 — ненулевой элемент из X.

a) Показать, что аннулятор $\mathfrak{J}$ точки ξ_0 является регулярным максимальным левым идеалом алгебры A; этот идеал замкнут.

b) Показать, что отображение $x \longmapsto x\xi_0$ определяет после перехода к факторалгебре изоморфизм φ A-модуля $A/\mathfrak{J}$ на A-модуль X.

c) Показать, что изоморфизм φ банахова пространства $A/\mathfrak{J}$ на пространство X индуцирует на последнем норму, относительно которой X становится банаховым пространством, и $\|\varphi(x)\| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in A$.

d) Показать, что если алгебра A примитивна (*Алг.*, гл. VIII, 5, упр. 5), то $A = \{0\}$ или $\mathbf{C} \cdot 1$ в зависимости от того, содержит ли A единичный элемент или нет. (Использовать предыдущие упражнения и следствие 4 теоремы 1.)

¶ 19) Пусть A — банахова алгебра и $\mathfrak{N}$ — ее радикал.

a) Показать, что если $r \in \mathfrak{N}$, то ряд

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-4r)^k$$

сходится к элементу $x \in \mathfrak{N}$, такому, что $x^2 - x + r = 0$.

b) Пусть класс смежности в $A/\mathfrak{N}$, которому принадлежит элемент $u \in A$, является идемпотентом. Показать, что существует идемпотент в A, сравнимый с элементом u по модулю $\mathfrak{N}$. (Можно предполагать, что A содержит единичный элемент. Пусть $q = u - u^2 \in \mathfrak{N}$ и $x \in \mathfrak{N}$ — построенное с помощью а) решение уравнения $x^2 - x - q(1 - 4q)^{-1} = 0$. Тогда $u - (2u - 1)x$ — искомый идемпотент.)

20) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$, ζ — точка границы $\mathrm{Sp}_A x$. Показать, что резольвента элемента x не может быть продолжена до функции, непрерывной в точке ζ.

21) Пусть A — банахова алгебра с единицей, Δ — некоторая открытая часть в $\mathbf{C}$, $\lambda \longmapsto R(\lambda)$ — отображение Δ в A, такое, что

$$R(\lambda) - R(\mu) = -(\lambda - \mu)\, R(\lambda)\, R(\mu) \tag{1}$$

при всех λ, $\mu \in \Delta$.

a) Пусть $\lambda_0 \in \Delta$. Показать, что для всех $\lambda \in \Delta$, таких, что $|\lambda - \lambda_0| \times \|R(\lambda)\| < 1$, справедливо равенство

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0)^{n+1}.$$

b) Показать, что для всех $\lambda \in \Delta$

$$(d^n/d\lambda^n)\, R(\lambda) = (-1)^n n!\, R(\lambda)^{n+1}.$$

c) Показать, что если отображение R голоморфно на бесконечности, то существуют элементы x, j, $z \in A$, такие, что $z^2 = 0$, $j^2 = j$, $zj = jz = 0$, $x \in jAj$ и для достаточно больших значений $|\lambda|$ имеет место равенство $R(\lambda) = z + jR(\lambda, x)$. (Записать $R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^{-n}$ при $|\lambda| > \lambda_0$ и воспользоваться тем, что для R справедливо равенство (1). Можно положить $c_0 = z$, $c_1 = j$, $c_2 = x$.)

d) Показать, что отображение R есть сужение на Δ резольвенты некоторого элемента из A в том и только в том случае, если при некотором $\lambda_0 \in \Delta$ элемент $R(\lambda_0)$ обратим.

e) Показать, что при всех $x \in A$ фуикция $\lambda \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n x^{n+1}$ удовлетворяет соотношению (1), если $|\lambda - \lambda_0| \|x\| < 1$.

¶ 22) a) Пусть B — банахова алгебра с единицей, $w \in B$, $C > 1$ и $\varepsilon > 0$. Показать, что существует $\eta > 0$, такое, что из условий $u \in B$, $\|u\| < C$, $\|uw - w\| < \eta$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1/4C$ следует неравенство $\|yw - w\| < \varepsilon$, где $y = (1 - \gamma + \gamma u)^{-1}$.

b) Пусть A — банахова алгебра. Предположим, что существует постоянная C, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и любых элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ существует элемент $u \in A$, для которого $\|u\| < C$, $\|ux_1 - x_1\| < \varepsilon, \ldots, \|ux_n - x_n\| < \varepsilon$. Показать, что для всякого $z \in A$ и любого $\delta > 0$ существуют элементы $x, y \in A$, такие, что $z = xy$, $y \in \overline{Az}$, $\|z - y\| < \delta$. (Можно считать, что $C > 1$. Пусть $\gamma = 1/4C$. Применяя a) к $\tilde{A}$, определить по индукции последовательность $u_1, u_2, \ldots$ элементов в A, таких, что $\|u_n\| < C$, элементы

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma (1 - \gamma)^{k-1} u_k + (1 - \gamma)^n$$

имеют обратные t_n, и при этом $\|t_n z - t_{n-1} z\| < \delta/2^n$, $\|t_1 z - z\| < \delta/2$. Полагая $y_n = t_n z$, мы видим, что y_n стремятся к некоторому пределу $y \in A$, а x_n стремятся к элементу $x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma (1 - \gamma)^{k-1} u_k$; элементы x и y обладают требуемыми свойствами.)

c) Пусть A — банахова алгебра, удовлетворяющая всем условиям из b). Пусть $(z_1, z_2, \ldots)$ — некоторая последовательность элементов из A, стремящаяся к 0. Показать, что существуют элементы $x, y_1, y_2, \ldots$ из A, такие, что $z_n = xy_n$ для всех n и y_n стремится к 0.

23) a) Пусть E — банахово пространство, f: $\mathbf{C} \to E$ — целая функция и $\theta \longmapsto P(\theta) = \sum_{\mu=k}^{m} c_\mu e^{\mu i\theta}$ — тригонометрический полином ($c_k \neq 0$). Предположим, что $|P(\theta)| \cdot \| f(re^{i\theta}) \| \leqslant Mr^\alpha$ для всех $r \geqslant r_0$ (M, r_0, α — неотрицательные постоянные). Показать, что тогда функция f является полиномом степени $\leqslant \alpha$. (Пусть $f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu$, $J(r, p) = r^{-p} \int_0^{2\pi} P(\theta) f(re^{i\theta}) \times e^{-(k+p)i\theta}\, d\theta$. Тогда $J(r, p)$ стремится к 0, когда r стремится к $+\infty$, а $p > \alpha$; с другой стороны, $\lim_{r \to +\infty} J(r, p) = c_k a_p$.)

b) Аналогично, показать, что если α — целое число и $r^{-\alpha} |P(\theta)| \times \| f(re^{i\theta}) \|$ стремится к 0 при $r \to +\infty$, то f — многочлен степени, меньшей α.

c) Пусть A — банахова алгебра с единицей, x — квазинильпотентный элемент A. Предположим, что для некоторого целого $n > 0$ имеем $r^{-n} |\cos^n \theta| \cdot \| (1 - \lambda x)^{-1} \| \to 0$ при $r \to +\infty$ ($\lambda = re^{i\theta}$). Показать, что тогда $x^n = 0$. (Применить b).)

¶ 24) a) Пусть E — банахово пространство, x: $\mathbf{C} - \{1\} \to E$ — целая функция от $1/(\zeta - 1)$, $x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$, $x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n}$ — разложения функции x при $|\zeta| < 1$, соответственно при $|\zeta| > 1$. Допустим, что $\|a_n\| = o(n^\alpha)$, $\|b_n\| = o(n^\alpha)$, $\alpha > 0$. Показать, что тогда $x(\zeta)$ является многочленом от $1/(\zeta - 1)$ степени, меньшей $\alpha + 1$. (Пусть $\varepsilon > 0$. Для $r_\varepsilon \leqslant r = |\zeta| < 1$ имеет место неравенство $\|x(\zeta)\| \leqslant \varepsilon (1 - r)^{-1-\alpha}$, а при $1 < r \leqslant r'_\varepsilon$ — неравенство $\|x(\zeta)\| \leqslant \varepsilon \left(1 - r^{-1}\right)^{-1-\alpha}$. Полагая $1 - \zeta = \left(\omega + \frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\omega = Re^{i\theta}$, показать, что для $0 \leqslant r < 1$ и $R \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$(1 - r)^{-1} \leqslant \frac{9}{4} \frac{R}{\cos\theta},$$

а для $1 < r$ и $R \geqslant 1$

$$\left(1 - r^{-1}\right)^{-1} \leqslant \frac{9}{4} \frac{R}{\cos\theta}.$$

Положить $y(\omega) = x(\zeta)$ и показать, что $R^{-\alpha-1} |\cos\theta|^{\alpha+1} \cdot \| y(Re^{i\theta}) \|$ стремится к 0 при $R \to +\infty$ равномерно по θ. Применить затем упражнение 23 b).)

b) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $q \in A$ — некоторый квазинильпотентный элемент, $x = 1 + q$. Показать, что для выполнения равенства $q^N = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\| x^{\pm n} \| = o(n^N)$ при $n \to +\infty$. (Для доказательства достаточности показать, применяя a), что $R(\lambda, x)$ — многочлен от $1/(\lambda - 1)$ степени, не превосходящей N. С другой стороны, $R(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n (\lambda - 1)^{-n-1}$.) Вывести отсюда, что

если $\mathfrak{P}$ — радикал в A и если G — некоторая подгруппа группы обратимых в A элементов, такая, что $\| x^{\pm n} \| = o(n)$ для всех $x \in G$, то суженне на G каноннческого отображенни $A \to A/\mathfrak{P}$ инъективно.

25) a) Пусть A — нормированная алгебра, x и y — элементы нз A, такие, что $xy - yx = y$. Показать, что $y^n = 0$ при $n > 2\|x\|$. (Применить формулу $xy^n - y^n x = ny^n$.)

b) Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая алгебра Ли конечной размерности над $\mathbf{C}$. Показать, что если алгебра $\mathfrak{L}$ не нильпотентна, то она содержит два ненулевых элемента x, y, таknх, что $[x, y] = y$. (Воспользоваться существованием такого элемента $x \in \mathfrak{L}$, для которого $\mathrm{ad}(x)$ не нильпотентен.)

c) Пусть $\mathfrak{L}$ — вещественная или комплексная алгебра Ли конечной размерности, такая, что обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{L}$ обладает нормой, согласованной со структурой алгебры. Показать, что алгебра $\mathfrak{L}$ нильпотентна. (Применить a) и b).)

d) Пусть V — вещественное или комплексное векторное пространство конечной размерности, $\mathfrak{L}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, состоящая из нильпотентных эндоморфизмов, $x_1, \ldots, x_n$ — элементы в $\mathfrak{L}$. Пусть $\alpha > 0$. Показать, что на V существует структура гильбертова пространства, такая, что $\|x_i\| \leqslant \alpha$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.

e) Пусть $\mathfrak{L}$ — вещественная или комплексная алгебра Ли конечной размерности. Пусть, далее, $\mathfrak{L}$ нильпотентна и U — ее обертывающая алгебра. Показать, что на U существует норма, согласованная со структурой алгебры. (Используя *Группы и алг. Ли*, гл. 1, § 3, упр. 5, и § 7, упр. 3, показать, что существует семейство (π_λ) представлений алгебры $\mathfrak{L}$ в пространствах V_λ конечной размерности, обладающих следующим свойством: для каждого элемента $u \in U$ существует λ, такое, что $\pi_\lambda(u) \neq 0$ и $\pi_\lambda(\mathfrak{L})$ состоит при всех λ из нильпотентных эндоморфизмов. Наделяя каждое пространство V_λ гильбертовой структурой в соответствии с d), получить в прямой сумме V гильбертовых пространств V_λ представление π алгебры $\mathfrak{L}$, состоящее из непрерывных эндоморфизмов, и тем самым обнаружить существование инъективного морфизма φ из U в $\mathscr{L}(V)$. Положить затем $\|u\| = \|\varphi(u)\|$ для всякого $u \in U$.)

f) Пусть A — нормированная алгебра с единицей, x и y — элементы из A. Показать, что если $A \neq \{0\}$, то $xy - yx \neq 1$. (Первое доказательство: имеет место равенство

$$\mathrm{Sp}'(xy) = \mathrm{Sp}'(yx);$$

если $xy = yx + 1$, то $\mathrm{Sp}(xy)$ переходит в $\mathrm{Sp}(yx)$ в результате преобразования $z \mapsto z + 1$; отсюда следует, что $\mathrm{Sp}'(xy)$ неограннчен, что абсурдно. Второе доказательство: если $[x, y] = 1$, то $[xy, y] = y$, откуда, в силу a), для достаточно большого n имеем $y^n = 0$; так как $[x, y^p] = py^{p-1}$, то получаетси, что $y = 0$.)

26) Пусть A — нормированная алгебра и $x \in A$. Элемент x называют топологически нильпотентным, если $x^n \to 0$ при $n \to \infty$. Показать, что x топологически нильпотентеи тогда и только тогда, когда $\rho(x) < 1$.

27) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей. Предположим, что каждый замкнутый идеал в A имеет конечный тип (т. е. представляется в виде $Ax_1 + \ldots + Ax_n$, где $x_1, \ldots, x_n \in A$).

a) Показать, что всякий идеал $\mathfrak{J}$ в A замкнут. (Имеем $\overline{\mathfrak{J}} = Ax_1 + \ldots + Ax_n$, где $x_1, \ldots, x_n \in A$. Пусть $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots)$ — последовательиость элементов из $\mathfrak{J}$, сходящаяся к x_i. Дли $(y_1, \ldots, y_n) \in A^n$ положим

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \in \overline{\mathfrak{J}},$$

$$\varphi_p(y_1, \ldots, y_n) = x_{1p} y_1 + \ldots + x_{np} y_n \in \mathfrak{J}.$$

Имеем $\varphi \in \mathscr{L}(A^n, \overline{\mathfrak{J}})$, $\varphi_p \in \mathscr{L}(A^n, \mathfrak{J})$, $\|\varphi - \varphi_p\| \to 0$ при $p \to +\infty$ и φ — сюръективное отображение. Рассматривая сопряженные отображения

к φ и φ_p, заключаем, что φ_p сюръективно при достаточно больших p. Стало быть, $\mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}}$.)

b) Показать, что если A — алгебра без делителей нуля, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$. (Применить а) и упражнение 9.)

c) Показать, что если единственный нильпотентный элемент в A есть 0, то существует целое $n \geqslant 0$, такое, что A изоморфна $\mathbf{C}^n$. (Так как алгебра A нётерова, то $\{0\}$ является пересечением простых идеалов $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$; эти идеалы замкнуты в силу а) и $A/\mathfrak{p}_i$ изоморфны $\mathbf{C}$ в силу b).)

d) Показать, что в общем случае $\dim_{\mathbf{C}} A < +\infty$. (Пусть $\mathfrak{R}$ — множество нильпотентных элементов в A, являющееся (замкнутым) идеалом в A. Тогда, в силу с), $\dim(A/\mathfrak{R}) < +\infty$. Так как $\mathfrak{R}$ — идеал конечного типа, то $\mathfrak{R}^n = 0$ для достаточно большого n. Наконец, каждый идеал $\mathfrak{R}^i/\mathfrak{R}^{i+1}$ является модулем конечного типа над $A/\mathfrak{R}$, следовательно, $\dim(\mathfrak{R}^i/\mathfrak{R}^{i+1}) < +\infty$.)

28) Пусть A — алгебра с единицей над $\mathbf{C}$, наделенная локально выпуклой отделимой топологией, такой, что умножение в A раздельно непрерывно. Элемент $a \in A$ называют регулярным, если существует $r \geqslant 0$, такое, что $a - \lambda$ обратим для $|\lambda| \geqslant r$, а множество элементов вида $(a - \lambda)^{-1}$ при $|\lambda| \geqslant r$ ограничено.

a) Показать, что если элемент a регулярен, то $\lambda(a - \lambda)^{-1}$ остается ограниченным при $|\lambda| \geqslant r$.

b) Показать, что если отображение $x \longmapsto x^{-1}$ определено в окрестности точки 1 и непрерывно в точке 1, то все элементы из A регулярны.

c) Пусть U_a для каждого $a \in A$ есть множество таких $\lambda \in \mathbf{C}$, что $(a - \mu)^{-1}$ существует и ограничено для всех μ из некоторой окрестности λ. Пусть $S_a = \mathbf{C} - U_a$. Показать, что S_a замкнуто, и если a — регулярный элемент в A, то S_a — непустой компакт (в предположении, что $A \neq \{0\}$).

d) Пусть $a \in A$. Показать, что функция $\lambda \longmapsto (a - \lambda)^{-1}$ голоморфна в U_a.

e) Пусть $a \in A$. Доказать, что $\lambda \in U_a$ в том и только в том случае, когда элемент $a - \lambda$ имеет регулярный обратный.

f) Показать, что если все элементы в A регулярны и A есть тело, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$.

29) Пусть A — алгебра над $\mathbf{R}$, являющаяся телом и снабженная отделимой локально выпуклой топологией, относительно которой умножение в A непрерывно, а отображение $x \longmapsto x^{-1}$ непрерывно в точке 1. Показать, что тогда алгебра A $\mathbf{R}$-изоморфна $\mathbf{R}$, или $\mathbf{C}$, или $\mathbf{H}$. (Если алгебра A коммутативна над $\mathbf{C}$ и существует элемент $u \in A$, такой, что $u^2 = -1$, — снабдить A структурой алгебры над $\mathbf{C}$ и применить упражнение 28 f). Если A коммутативна, но такого элемента не существует, — применить упражнение 28 f) к алгебре $A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, которая является телом. Если алгебра A не коммутативна, — рассуждать так же, как в *Комм. алг.*, гл VI, § 6, n° 4, теор. 1, третий случай.)

¶ 30) Пусть A — алгебра над $\mathbf{C}$, состоящая из сужений на $(0, 1)$ рациональных функций одной переменной с комплексными коэффициентами. Эта алгебра является телом.

a) Снабдить алгебру A топологией сходимости по мере (*Интегр.*, гл. IV, 2-е изд., § 5, n° 11). Показать, что в этой топологии отображения $(x, y) \longmapsto x + y$, $(x, y) \longmapsto xy$ из $A \times A$ в A непрерывны и отображение $x \longmapsto x^{-1}$ из A^* в A также непрерывно. Эта топология в A не является локально выпуклой.

b) Для каждого $n \in \mathbf{N}^*$ определим последовательность $(w_{r,n})_{r \in \mathbf{Z}}$ равенствами $w_{-r,n} = (r+1)^{n(r+1)}$ для $r \geqslant 1$, $w_{0,n} = 1$, $w_{s,n} = (s+1)^{-(s+1)/n}$

для $s \geqslant 1$. Если $f \in A$, положим $p_n(f) = \sum_r w_{r,n} |a_r| < +\infty$, где $\sum a_r t^r$ — разложение Лорана функции $f(t)$ относительно точки 0. Показать, что тогда p_n являются полунормами, которые определяют на A метризуемую локально выпуклую топологию. Отображение $(x, y) \longmapsto xy$ из $A \times A$ в A непрерывно в этой топологии. Отображение $x \longmapsto x^{-1}$ из A^* в A не является непрерывным. Наконец, алгебра A не полна в этой топологии.

31) a) Пусть A — алгебра над $\mathbf{C}$, снабженная локально выпуклой топологией. Показать, что следующие условия эквивалентны: α) существует фундаментальная система (U_i) уравновешенных выпуклых окрестностей нуля, таких, что $U_i U_i \subset U_i$ для всех i; β) алгебра A изоморфиа некоторой подалгебре произведения нормированных алгебр; γ) топология в A может быть определена с помощью семейства полунорм p_i, удовлетворяющих неравенству $p_i(xy) \leqslant p_i(x)\, p_i(y)$ при любых $x, y \in A$. Алгебру A, удовлетворяющую этим условиям, называют локально m-выпуклой. Показать, что в этом случае отображение $(x, y) \longmapsto xy$ из $A \times A$ в A непрерывно. Если алгебра A содержит единичный элемент и G — множество всех ее обратимых элементов, то отображение $x \longmapsto x^{-1}$ из G в A непрерывно.

b) Пусть A — локально m-выпуклая алгебра с единичным элементом. Показать, что спектр каждого элемента из A не пуст. Если A — тело, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$.

c) Пусть A — полная, локально m-выпуклая алгебра. Показать, что существуют фильтрующееся возрастающее упорядочениое множество I, семейство $(A_i)_{i \in I}$ банаховых алгебр и непрерывные морфизмы $\pi_{ij}: A_j \longmapsto A_i$ для $i \leqslant j$, удовлетворяющие соотношению $\pi_{ij}\pi_{jk} = \pi_{ik}$, такие, что алгебра A изоморфна подалгебре в $\prod_i A_i$, состоящей из тех элементов (x_i), для которых $\pi_{ij}(x_j) = x_i$ при $i \leqslant j$.

d) Показать, что алгебра $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$, снабженная топологией компактной сходимости, локально m-выпукла. Показать, далее, что множество обратимых элементов из $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ плотно в $\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ и не является открытым.

e) Пусть D — открытая часть в $\mathbf{C}$, A — алгебра комплексных голоморфных в D функций, снабженная топологией компактной сходимости. Показать, что тогда алгебра A локально m-выпукла. Ненулевой предел последовательности обратимых элементов из A обратим в A.

f) Показать, что алгебра всех бесконечно дифференцируемых комплексных функций на $(0, 1)$, снабженная топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными, является локально m-выпуклой.

g) Пусть A — алгебра (классов) комплексных функций f на $(0, 1)$, таких, что $f \in L^p((0, 1))$ для каждого $p > 1$. Показать, что алгебра A, снабженная нормой $f \longmapsto \|f\|_p (p > 1)$, не является локально m-выпуклой, но отображение $(x, y) \longmapsto xy$ из $A \times A$ в A непрерывно.

§ 3

1) Пусть A — коммутатнвная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — максимальный идеал в A. Показать, что возможны только два следующих случая: 1) $\mathfrak{J}$ — ядро некоторого характера алгебры A; 2) $\mathfrak{J}$ — некоторая гиперплоскость, содержащая A^2 (применить упражнение 6 к § 1). В частности, если идеал $\mathfrak{J}$ не замкнут, то $\mathfrak{J}$ — гиперплоскость, плотиая в A и содержащая A^2. (Чтобы получить пример этой последней ситуации, воспользоваться упражнением 3.)

2) Пусть A — банахова алгебра всех последовательностей $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ комплексных чисел, стремящихся к нулю, с нормой $\|x\| = \sup_i |\xi_i|$. Пусть

$\mathfrak{J}$ — множество всех тех последовательностей x, которые имеют лишь конечное число отличных от нуля членов. Показать, что тогда $\mathfrak{J}$ — идеал, плотный в A и не содержащийся ни в одном максимальном идеале. (Заметить, что $A^2 = A$, и применить упражнение 1.)

3) Пусть Λ — некоторое множество, $p \in [1, \infty[$ и $A = l^p(\Lambda)$ — множество всех $x = (\xi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $\xi_\lambda \in \mathbf{C}$, для которых $\| x \|_p = \left(\sum_\lambda | \xi_\lambda |^p \right)^{1/p} < +\infty$. Показать, что A — банахова алгебра относительно сложения и обычного умножения. (Если $\| (\xi_\lambda) \|_p \leqslant 1$ и $\| (\eta_\lambda) \|_p \leqslant 1$, то

$$\sum_\lambda | \xi_\lambda \eta_\lambda |^p \leqslant \left(\sum_\lambda | \xi_\lambda |^{p^2} \right)^{1/p} \left(\sum_\lambda | \eta_\lambda |^{pq} \right)^{1/q},$$

где $1/q + 1/p = 1$, откуда следует, что $\| (\xi_\lambda \eta_\lambda) \|_p \leqslant 1$.) Показать, далее, что $A^2 \neq A$, A^2 плотно в A и множество ненулевых характеров алгебры A естественным образом отождествляется с множеством Λ, снабженным дискретной топологией. (Воспользоваться тем, что двойственным пространством к $l^p(\Lambda)$ является $l^q(\Lambda)$. Преобразование Гельфанда оказывается тогда тождественным отображением, а его образ в пространстве функций, стремящихся к 0 на бесконечности в Λ, — плотным и не замкнутым.)

4) Пусть A — банахово пространство комплексных функций, интегрируемых на $[0, 1]$ по мере Лебега. Доказать, что если положить

$$(f \cdot g)(\omega) = \int_0^\omega f(\omega - \zeta)\, g(\zeta)\, d\zeta$$

для $\omega \in [0, 1]$, то функция $f \cdot g$ определена почти всюду и является элементом алгебры A. (Продолжить f и g нулем на $\mathbf{R} - [0, 1]$ и применить *Интегр.*, гл. VIII, § 4, п° 5, предл. 12.) Показать, что A оказывается коммутативной банаховой алгеброй. Пусть $x \in A$ — постоянная функция, равная 1. Тогда функция x^n имеет вид

$$\omega \longmapsto \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Показать, что алгебра A порождается элементом x, что x — квазинильпотентный элемент и что алгебра A совпадает со своим радикалом. Пусть e_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — элементы из A, определенные равенствами $e_n(t) = n$ для $0 \leqslant t \leqslant 1/n$, $e_n(t) = 0$ для $t > 1/n$. Воспользоваться этой системой элементов для проверки того, что алгебра A обладает свойством, указанным в упр. 22 к § 2, в частности, что $A^2 = A$. Применяя упражнение 1, показать, что алгебра A не содержит ни одного максимального идеала (регулярного или нет, замкнутого или нет.)

5) Пусть $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ — последовательность положительных чисел, таких, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_m \alpha_n$, $\lim_{k \to +\infty} \alpha_k^{1/k} = 0$. Пусть A — множество формальных рядов $x = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \zeta^k \in \mathbf{C}[[\zeta]]$, таких, что $\| x \| = \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|\, \alpha_k < +\infty$. Показать, что A — коммутативная банахова алгебра с единицей, порожденная элементом ζ, причем единственным максимальным идеалом в A является множество всех элементов $x \in A$ с нулевым постоянным членом в разложении по степеням ζ. (Заметить, что элемент ζ квазинильпотентен.)

6) Показать, что в алгебре $\mathbf{C}(X)$ рациональных функций над $\mathbf{C}$ множество $\{0\}$ является максимальным идеалом, но не коразмерности 1.

7) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей и $\chi \in \mathrm{X}(A)$. Для каждого элемента $x \in A$ положим $\| x \|_\chi = | \chi(x) | + \| x - \chi(x) \|$. Показать, что $x \longmapsto \| x \|_\chi$ является нормой, что $\| xy \|_\chi \leqslant \| x \|_\chi \| y \|_\chi$, $\| e \|_\chi = 1$ и

$$\| x \| \leqslant \| x \|_\chi \leqslant 3 \| x \|, \quad \text{если} \quad \| e \| = 1.$$

8) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, такая, что $\| 1 \| = 1$. Пусть N — множество всех норм в A, эквивалентных исходной, по отношению к которым A еще остается банаховой алгеброй, а 1 имеет норму 1.

a) Пусть элемент $x_0 \in A$ таков, что $\rho(x_0) < 1$. Для каждого $x \in A$ положим

$$\| x \|' = \inf \sum_n \| a_n \|,$$

где нижняя грань берется по всем представлениям x в виде $a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in A)$. Показать, что норма $x \longmapsto \| x \|'$ является элементом N. (Так как $\rho(x_0) < 1$, то $\| x_0^n \| \leqslant k$ при всех n, откуда $\| x \| \leqslant k \| x \|'$.) Показать, что $\| x_0 \|' \leqslant 1$.

b) Вывести из a), что для каждого элемента $x \in A$ имеет место равенство

$$\rho(x) = \inf_{n \in N} n(x).$$

c) Показать, что если единственным элементом в N является исходная норма в A, то $A = \mathbf{C} \cdot 1$. (Применить b) и упр. 7.)

9) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, D — непрерывное линейное отображение A в A, такое, что $D(ab) = (Da)\, b + a\, (Db)$ для всех $a, b \in A$.

a) Показать, что для каждого характера $\chi \in \mathrm{X}'(A)$ и каждого $\lambda \in \mathbf{C}$ ряд $\varphi_\lambda(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^n / n!)\, \chi(D^n a)$ сходится; $\lambda \longmapsto \varphi_\lambda(a)$ — целая функция и отображение $a \longmapsto \varphi_\lambda(a)$ является характером алгебры A.

b) Показать, что число $\varphi_\lambda(a)$ не зависит от λ. (Заметить, что $| \varphi_\lambda(a) | \leqslant \| a \|$ в силу a).) Следовательно, $\chi(Da) = 0$.

c) Показать, что D переводит алгебру A в ее радикал. Вывести отсюда новое доказательство упр. 25 f) к § 2.

10) Пусть D — алгебра всех бесконечно дифференцируемых функций f: $(0, 1) \to \mathbf{C}$.

a) Пусть A — некоторая подалгебра в D, снабженная нормой, относительно которой A является банаховой алгеброй. Показать, что существует последовательность $(m_0, m_1, m_2, \ldots)$ неотрицательных чисел, таких, что для каждого $x \in A$

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} | x^{(n)}(t) | = O(m_n).$$

(Пусть D_n — банахова алгебра функций, n раз непрерывно дифференцируемых на $(0, 1)$. В силу предложения 6, каноническая инъекция $A \to D_n$ непрерывна; пусть M_n — ее норма; если $x \in A$, то $(1/n!) \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} | x^{(n)}(t) | \leqslant M_n \| x \|$.)

b) Показать, что не существует никакой нормы на D, относительно которой D становится банаховой алгеброй. (Для каждой последовательности неотрицательных чисел $(m_0, m_1, \ldots)$ существует функция $f \in D$, такая, что $f^{(n)}(0) = n m_n$ при всех $n \geqslant 0$. Применить a).)

11) a) Пусть A — банахова алгебра, χ — некоторый морфизм из A в $\mathbf{C}$. Показать, что $|\chi(x)| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in A$. (Доказательство то же, что и для теоремы 1.)

b) Доказать справедливость предложения 6 без предположения о коммутативности банаховой алгебры A.

12) Пусть A — банахова алгебра с единицей (x_n) — некоторая последовательность обратимых элементов из A, сходящаяся к элементу $x \in A$. Показать, что если последовательность $\left(\rho\left(x_n^{-1}\right)\right)$ ограничена и если $x_n x = x x_n$ при всех n, то элемент x обратим. (В силу следствия предложения 5 имеет место неравенство $\rho\left(1 - x_n^{-1}x\right) \leqslant \rho\left(x_n^{-1}\right)\rho\left(x_n - x\right)$; следовательно, элемент $x_n^{-1}x$ обратим при достаточно больших n.)

¶ 13) Пусть A — банахова алгебра $l^2(\mathbf{N})$ (упр. 3). Пусть A_0 — подалгебра, образованная теми последовательностями, в которых только конечное число членов отлично от нуля. Пусть B — прямая сумма A_0 и $\mathbf{C}$ с умножением $(f, \alpha)(g, \beta) = (fg, 0)$ для всех $f, g \in A_0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ и нормой

$$\|(f, \alpha)\| = \sup\left(\|f\|, \left|\alpha - \sum_n f(n)\right|\right).$$

Показать, что тогда $\widehat{B}$ является коммутативной банаховой алгеброй, радикал которой $\mathfrak{R}$ совпадает с $\mathbf{C} \cdot (0, 1)$, а факторалгебра $\widehat{B}/\mathfrak{R}$ изометрически изоморфна A. Пусть $\pi: \widehat{B} \to \widehat{B}/\mathfrak{R}$ — каноиический морфизм. Показать, что не существует никакой подалгебры B_1 в $\widehat{B}$ с дополнением $\mathfrak{R}$, для которой отображение $\pi | B_1 : B_1 \to \widehat{B}/\mathfrak{R} = A$ является гомеоморфизмом. (Пусть B_1 — такая подалгебра. Пусть элемент $u_k \in A$ таков, что $u_k(k) = 1$, $u_k(k') = 0$ для $k' \neq k$. Пусть, далее, $e_k \in B_1$ и $\pi(e_k) = u_k$. Показать, что $e_k \in A_0$, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k/k$ сходится в A, но ряд $\sum_{k=1}^{\infty} e_k/k$ не сходится в $\widehat{B}$.)

14) Пусть Ω — компактное множество в $\mathbf{C}^2$, определенное неравенством

$$\frac{1}{2} \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1,$$

и пусть A — подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$, состоящая из функций, голоморфных в $\overset{\circ}{\Omega}$. Пусть U — открытое множество, определеиное неравенством $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$. На основании теоремы Хартогса [1]) для каждой фуикции $f \in A$ существует и притом единственная функция $\tilde{f} \in \mathscr{C}(\overline{U})$, голоморфная в U и совпадающая с функцией f на Ω. Показать, что каноническая инъекция из A в $\mathscr{C}(\Omega)$ есть изометрический морфизм h, а его образ является наполненной подалгеброй в $\mathscr{C}(\Omega)$, но отображение $\mathrm{X}(h)$ не сюръективно.

15) Пусть A и B — коммутативные банаховы алгебры с единицей, φ — морфизм алгебр с единицей из A в B, (x_λ) — семейство элементов из A, такое, что замкнутая наполненная подалгебра в A, порожденная этим семейством, совпадает с A. Показать, что для того, чтобы $\mathrm{X}(\varphi)$ был сюръективным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Sp}_A((x_\lambda)) = \mathrm{Sp}_B((\varphi(x_\lambda)))$. (Применить диаграмму (1), n° 5, где правая стрелка соответствует биективному отображению в силу предложения 9.)

16) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, B — банахова алгебра непрерывных функций, стремящихся к иулю иа бесконечности в простран-

---

[1]) См., например, книгу: Бохнер С., Мартин У. Т., Функции многих комплексных перемеииых, М., 1951 (перемеииая u предполагается там вещественной, но можно ее считать и комплексной).

стве $X(A)$. Показать, что следующие условия эквивалентны: (i) A — алгебра без радикала и $\mathscr{G}(A)$ замкнуто в B; (ii) $\mathscr{G}$ является гомеоморфизмом A на $\mathscr{G}(A)$; (iii) существует постоянная $a>0$, такая, что $\|x\|^2 \leqslant a\|x^2\|$ для всех $x \in A$.

17) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A, h — каноническая инъекция из $\mathfrak{J}$ в A. Показать, что пространство $X'(\mathfrak{J})$ отождествляется с факторпространством $X'(A)$ по отношению эквивалентности, определяемому отображением $X'(h)$. (Применить упражнение 4a) к § 1.)

18) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, x — некоторый элемент из A. Предположим, что наполненная замкнутая подалгебра в A, порожденная элементом x, совпадает с A. Тогда отображение $\chi \longmapsto \chi(x)$ позволяет отождествить $X(A)$ и $\operatorname{Sp} x$. Пусть $\mathscr{H}$ — множество функций вида $\mathscr{G}y$ на $\operatorname{Sp} x$, когда y пробегает всю алгебру A. Показать, что тогда множество $\check{S}_{\mathscr{H}}(\operatorname{Sp} x)$ (*Интегр.*, гл. IV, 2-е изд., § 7, n° 4) является границей $\operatorname{Sp} x$ относительно $\mathbf{C}$. (Для проверки того, что $\check{S}_{\mathscr{H}}(\operatorname{Sp} x)$ содержится в этой границе, применить принцип максимума. Обратно, пусть z_0 — некоторая точка этой границы; для доказательства ее принадлежности к $\check{S}_{\mathscr{H}}(\operatorname{Sp} x)$ рассмотреть $(x-z_1)^{-1}$, когда z_1 достаточно близко к z_0 в $\mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$.)

19) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей, B — замкнутая подалгебра с единицей в A, T — отображение $\chi \longmapsto \chi \mid B$ из $X(A)$ в $X(B)$, R — отношение эквивалентности в $X(A)$, определенное отображением T. Показать, что тогда T определяет (в результате перехода к факторпространству) гомеоморфизм $X(A)/R$ на $T(X(A))$, и для каждой функции $f = \mathscr{G}_B(x)$ (где $x \in B$) величина $|f|$ достигает своего максимума на $T(X(A))$.

20) Пусть Δ — круг $|z| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$, A — множество всех $f \in \mathscr{C}(\Delta)$, голоморфных внутри Δ, A_1 — банахова подалгебра в $\mathscr{C}(\Delta)$, порожденная алгеброй A и функцией $z \longmapsto |z|$. Показать, что $X(A_1)$ гомеоморфно множеству тех точек $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, для которых $x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_3^2$, $0 \leqslant x_3 \leqslant 1$.

21) a) Пусть $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — некоторое семейство переменных. Для каждого формального ряда $f \in \mathbf{C}[[X_\lambda]]_{\lambda \in \Lambda}$ обозначим через $\|f\|$ сумму абсолютных значений его коэффициентов. Пусть A — множество таких $f \in \mathbf{C}[[X_\lambda]]_{\lambda \in \Lambda}$, что $\|f\| < +\infty$. Показать, что после введения обычных операций сложения и умножения A становится коммутативной банаховой алгеброй с единицей без радикала.

b) Показать, что для любой коммутативной банаховой алгебры с единицей B существует алгебра типа A и непрерывный морфизм алгебр с единицей из A на B.

22) Пусть Ω — некоторая компактная часть $\mathbf{C}^n$. Показать, что отображение

$$(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \longmapsto (\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

является гомеоморфизмом компакта Ω на полиномиально выпуклую компактную часть $\mathbf{C}^{2n}$. (Пусть $A = \mathscr{C}(\Omega)$, z_i — координатные функции на $\mathbf{C}^n$. Тогда $(z_i|\Omega, \bar{z}_i|\Omega)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ есть система топологических образующих в A, а рассматриваемое отображение есть отображение из $X(A) = \Omega$ в $\mathbf{C}^{2n}$, определяемое этой системой топологических образующих.)

23) Пусть $\alpha \in (0, 1)$, Ω — множество точек $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{C}^2$, таких, что $|\zeta_1| \leqslant 1$, $|\zeta_2| \leqslant 1$, Ω_α — множество точек $(\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbf{C}^2$, таких, что

$$|\zeta_1| \leqslant 1, \quad |\zeta_2| \leqslant (1-\alpha)|\zeta_1| + \alpha.$$

a) Показать, что дополнения к Ω и Ω_α в $\mathbf{C}^2$ связны.

b) Показать, что Ω является полиномиально выпуклой оболочкой Ω_α. (Если $(\zeta_1^0, \zeta_2^0) \in \Omega$ и $P \in \mathbf{C}[\zeta_1, \zeta_2]$, то существует число $\xi \in \mathbf{C}$, такое, что $|\xi| = 1$ и $|P(\zeta_1^0, \zeta_2^0)| \leqslant |P(\xi, \zeta_2^0)|$; но $|P(\xi, \zeta_2^0)| \leqslant \sup_{(\zeta_1, \zeta_2) \in \Omega_\alpha} |P(\zeta_1, \zeta_2)|$.)

24) Пусть A — коммутативная полная локально m-выпуклая алгебра с единицей.

a) Показать, что элемент x из A обратим в том и только в том случае, когда $\chi(x) \neq 0$ для всех непрерывных характеров χ алгебры A. Радикал в A является пересечением всех ядер непрерывных характеров алгебры A и, стало быть, замкнут.

b) Пусть в примере упр. 31d) к § 2 $\mathfrak{J}$ — идеал, образованный всеми f, такими, что $f(n) = 0$ для всех достаточно больших целых $n > 0$. Показать, что тогда каждый максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{J}$, является плотным и имеет бесконечную коразмерность.

§ 4

1) Пусть A — банахова алгебра с единицей, G — группа ее обратимых элементов. Показать, что

a) Подгруппа из G, порожденная $\exp A$, является связной компонентой единицы группы G.

b) Для того чтобы элемент $x \in A$ представлялся в виде $\exp y$ ($y \in A$), необходимо и достаточно, чтобы он содержался в коммутативной связной подгруппе из G.

c) Для того чтобы элемент $x \in A$ представлялся в виде $\exp y$ ($y \in A$), достаточно, чтобы 0 принадлежал неограниченной связной компоненте $\mathbf{C} - \operatorname{Sp} x$.

2) Пусть A — банахова алгебра с единицей, G — группа ее обратимых элементов, G_1 — связная компонента единицы в G.

a) Пусть $x \in A$ и $n \geqslant 0$ — целое число, такое, что $x^n = e$. Показать, что $x \in G_1$. (Спектр элемента x конечен. Множество таких $\lambda \in \mathbf{C}$, что элемент $y(\lambda) = \lambda x + e - \lambda e$ обратим, имеет конечное дополнение и, следовательно, связно. Кроме того, $y(0) = e$, $y(1) = x$.)

b) Предположим, что алгебра A коммутативна. Показать, что каждый элемент из G/G_1, отличный от нейтрального, имеет бесконечный порядок. (Если $x \in G$ и $x^n \in G_1$, то $x^n = \exp y$, $y \in A$, в силу n° 9, откуда $(x \exp(-y/n))^n = e$. Применить a).)

3) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей.

a) Показать, что если j — идемпотент в A, то $\exp(2i\pi j) = 1$.

b) Пусть элемент $p \in A$ таков, что $\exp p = 1$. Показать, что тогда спектр $\operatorname{Sp} p$ (в силу предложения 8) сводится к конечному числу точек вида $2in\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Для числа $\lambda \notin \operatorname{Sp} p$ имеет место равенство

$$\int_0^1 \exp(\xi(p - \lambda 1))\, d\xi = (1 - \exp(-\lambda))(\lambda 1 - p)^{-1}.$$

Вывести отсюда, что каждая точка из $\operatorname{Sp} p$ есть простой полюс функции $R(\lambda, p)$. Применяя n° 11, показать, что $p = 2i\pi \sum_{\nu=1}^{k} n_\nu j_\nu$, где $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}$, а j_ν — попарно ортогональные идемпотенты.

¶ 4) a) Пусть B — комплексное банахово пространство, e — точка из B, такая, что $\|e\| = 1$. Показать, что для каждой точки $x \in B$ существует предел

$$\lim_{\alpha > 0,\ \alpha \to 0} \alpha^{-1}(\|e + \alpha x\| - 1);$$

обозначим его через $\varphi(x)$. Пусть $\psi(x) = \sup_{\varepsilon \in \mathbf{C},\ |\varepsilon| = 1} \varphi(\varepsilon x)$. Показать, далее, что ψ — полунорма, мажорируемая исходной нормой, и что $\psi(x) = \sup |f(x)|$, где f пробегает множество всех $f \in B'$ (B' — двойственное пространство к B), таких, что $\|f\| = f(e) = 1$.

b) Предположим теперь, что B — банахова алгебра, для которой e — единичный элемент. Доказать, что

$$\varphi(x) = \lim_{\alpha > 0,\ \alpha \to 0} \alpha^{-1} \log \|\exp(\alpha x)\| = \sup_{\alpha > 0} \alpha^{-1} \log \|\exp(\alpha x)\|.$$

(Заметить, что $\log \|\exp(\alpha + \alpha')x\| \leqslant \log \|\exp(\alpha x)\| + \log \|\exp(\alpha' x)\|$.)

c) Применяя b), показать, что $\|\exp(\lambda x)\| \leqslant \exp(|\lambda| \psi(x))$. Интегрируя функцию $\lambda \longmapsto \lambda^{-2} \exp(\lambda x)$ по окружности $|\lambda| = \rho$, вывести, что

$$\|x\| < \rho^{-1} \exp(\rho \psi(x)),$$

откуда, полагая $\rho = \psi(x)^{-1}$, получить неравенство

$$\|x\| \leqslant e \psi(x)$$

(здесь e, разумеется, означает основание натуральных логарифмов).

d) Показать, что для каждого ненулевого элемента x из B существует функционал $f \in B$, такой, что

$$f(e) = \|f\| = 1, \qquad f(x) \neq 0.$$

(Применить a) и c).)

5) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$ и B — подалгебра в A, порожденная элементом x. Для того чтобы $\operatorname{Sp} x$ сводился к конечному числу точек, являющихся полюсами резольвенты, необходимо и достаточно, чтобы $\dim B < +\infty$. (Если $R(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{p} F_i(\lambda) a_i$, где $a_i \in A$ и F_i — скалярные рациональные функции, то из разложения $R(x, \lambda)$ в окрестности точки $\lambda = \infty$ видно, что x^n являются линейными комбинациями элементов a_i. Обратно, если $\dim B < +\infty$, то существует ненулевой полином $f \in \mathbf{C}[X]$, такой, что $f(x) = 0$. Тогда $\operatorname{Sp} x$ содержится в множестве нулей f. Пусть $\lambda \in \operatorname{Sp} x$ — какой-нибудь нуль функции $f(X)$ порядка p; пусть $g(z) = f(z)(z - \lambda)^{-p}$ в окрестности точки λ и $g(z) = 1$ в окрестности $\operatorname{Sp} x - \{\lambda\}$; тогда $g(x)$ — обратимый элемент из A и $0 = f(x) e_{\{\lambda\}} = g(x)(x - \lambda e)^p e_{\{\lambda\}}$, откуда $(x - \lambda e)^p e_{\{\lambda\}} = 0$ и точка λ является полюсом резольвенты.)

6) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$, U — открытая окрестность $\operatorname{Sp} x$, содержащая только конечное число компонент связности U_i ($i \in I$), и $f \in \mathcal{O}(U)$. Показать, что для того, чтобы $f(x) = 0$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

a) для каждого i, такого, что $\operatorname{Sp} x \cap U_i$ — бесконечное множество или содержащее существенно особую точку резольвенты, $f | U_i = 0$;

b) каждый полюс резольвенты порядка p является нулем порядка $\geqslant p$ функции f. (По поводу необходимости этого условия см. упражнение 5).)

7) Пусть Δ — круг $|z| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$. Каждой последовательности $(c_n)_{n \geqslant 0}$ комплексных чисел, такой, что $\sum_n |c_n| < +\infty$, сопоставим функцию $f(z) = \sum_n c_n z^n$, непрерывную в Δ и голоморфную в $\overset{\circ}{\Delta}$. Положим $\|f\| = \sum_n |c_n|$. Множество всех этих функций на Δ оказывается, таким образом, банаховой алгеброй A с образующей z. Показать, что $\mathrm{X}(A)$ отождествляется с Δ, и если $f \in A$, а функция g голоморфна в некоторой окрестности $f(\Delta)$, то и $g \circ f \in A$.

8) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей и $x \in A$. Пусть S — некоторая часть $\mathrm{X}(A)$, замкнутая в топологии Джекобсона, и f — комплексная функция, голоморфная в некоторой окрестности $(\mathscr{G}x)(S)$. Показать, что существует элемент $y \in A$, такой, что $\mathscr{G}y = f \circ \mathscr{G}x$ на S. (Пусть $\mathfrak{I}$ — пересечение ядер всех $\chi \in S$. Использовать функциональное исчисление в $A/\mathfrak{I}$.)

9) Пусть Ω — открытая непустая часть в $\mathbf{C}$. Показать, что на пространстве $\mathscr{O}(\Omega)$ не существует нормы, относительно которой $\mathscr{O}(\Omega)$ являлось бы банаховой алгеброй. (Применяя теорему 1 § 3, показать, что функции из $\mathscr{O}(\Omega)$ были бы ограниченными.)

10) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$ и $k \geqslant 0$ — целое число.

a) Предположим, что $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathbf{U}$ и что $\|R(\lambda, x)\| = O((1 - |\lambda|)^k)$, когда $|\lambda| \to 1$. Показать, что $\|x^n\| + O(|n|^k)$, когда $n \to \pm\infty$. (Для каждого $\delta > 1$ с помощью интеграла Коши получить неравенство

$$2\pi \|x^n\| \leqslant M \frac{\delta^n}{(\delta - 1)^k} + M \frac{\delta^{-n}}{(1 - \delta^{-1})^k},$$

где M не зависит от n и δ. Положить $\delta = n/(n-k)$ в том случае, когда $n \to +\infty$, и $\delta = n/(n+k)$, когда $n \to -\infty$.)

b) Предположим, что $\|x^n\| = O(|n|^k)$ при $n \to \pm\infty$. Показать, что $\mathrm{Sp}\, x \in \mathbf{U}$ и что $\|R(\lambda, x)\| = O((1 - |\lambda|)^{k+1})$, когда $|\lambda| \to 1$. (Так как $\rho(x) = \rho(x^{-1}) = 1$, то $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathbf{U}$. При $|\lambda| < 1$ справедливо равенство

$$R(\lambda, x) = -x^{-1}(1 + \lambda x^{-1} + \lambda^2 x^{-2} + \lambda^3 x^{-3} + \ldots).$$

Теперь остается оценить $\|R(\lambda, x)\|$. Аналогичным образом поступить в случае $|\lambda| > 1$.)

11) Пусть X_1 (соответственно X_2) — множество всех $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$, для которых $1/2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1$ (соответственно $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1$). Пусть $X = X_1 \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbf{C}^2$. Пусть, далее, $A = \mathscr{C}(X)$ и a_1, a_2 — сужения на X координатных функций на $\mathbf{C}^2$. Показать, что совместный спектр $\mathrm{Sp}_A(z_1, z_2)$ совпадает с X. Построить два различных непрерывных морфизма алгебр с единицей из $\mathscr{O}(X)$ в A, переводящих z_1 в a_1, z_2 в a_2. (Первый морфизм строится с помощью теоремы 1. Второй получается после применения следующей теоремы: для каждой функции f, голоморфной в некоторой окрестности множества X_1, существует функция g, голоморфная в некоторой окрестности множества X_2, которая совпадает с f в некоторой окрестности X_1 (см. § 3, упр. 14).)

¶ 12) Пусть A — коммутативная банахова алгебра с единицей.

a) Для каждого конечного семейства J элементов из A пусть $S(J) \subset \mathbf{C}^J$ — совместный спектр J. Показать, что если J' содержит J, то каноническая сюръекция $\mathrm{pr}_{J, J'}$ из $\mathbf{C}^{J'}$ на $\mathbf{C}^J$ такова, что $\mathrm{pr}_{J, J'}(S(J')) = S(J)$.

Таким образом, определен инъективный морфизм $\varphi_{JJ'}$ из $\mathcal{O}(S(J))$ в $\mathcal{O}(S(J'))$. Пусть $\mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$ — индуктивный предел $\mathcal{O}(S(J))$ относительно $\varphi_{JJ'}$ (индексами фактически служат конечные части из $A \times \mathbf{N}$). Канонические отображения

$$\varphi_J : \mathcal{O}(S(J)) \to \mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$$

инъективны. Наделим $\mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$ топологией индуктивного предела, порожденной топологиями на $\mathcal{O}(\mathrm{X}(J))$. Для каждого элемента $a \in A$ координатная функция в окрестности $S(a) \subset \mathbf{C}$ определяет элемент z_a на $\mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$.

Непрерывная сюръекция $\mathrm{X}(A) \to S(J)$ определяет непрерывный морфизм $\mathscr{C}(S(J))$ в $\mathscr{C}(\mathrm{X}(A))$. Морфизмы $\mathcal{O}(S(J)) \to \mathscr{C}(S(J)) \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(A))$ определяют непрерывный морфизм

$$\varphi : \mathcal{O}(\mathrm{X}(A)) \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(A)).$$

Этот морфизм, вообще говоря, не инъективен.

Показать, что существует и притом единственный непрерывный морфизм алгебр с единицей φ из $\mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$ в A, такой, что $\varphi(z_a) = a$ для каждого элемента $a \in A$ (применить теорему 1). Суперпозиция этого морфизма с преобразованием Гельфанда совпадает с φ.

b) Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство, U — слабо открытая часть E и $f\colon U \to \mathbf{C}$ — некоторая функция. Говорят, что функция f слабо голоморфна, если для каждой точки $u \in U$ существуют слабо открытая окрестность V_u этой точки, некоторое замкнутое векторное подпространство F_u конечной коразмерности в E и голоморфная функция g_u на $p_u(V_u)$ (через p_u обозначается каноническое отображение E на E/F_u), такие, что $f \mid V_u = g_u \circ p_u$. Если K — слабо компактная часть U, то существуют некоторая слабо открытая окрестность V_K множества K в U, замкнутое векторное подпространство F_K конечной коразмерности в E и голоморфная функция g_K на $p_K(V_K)$ (через p_K обозначается каноническое отображение E на E/F_K), такие, что $f \mid V_K = g_K \circ p_K$.

Показать, что $\mathcal{O}(\mathrm{X}(A))$ является индуктивным пределом $\mathcal{O}(S)$, где S пробегает множество слабо открытых окрестностей $\mathrm{X}(A)$ в двойственном к A пространстве и где через $\mathcal{O}(S)$ обозначается алгебра слабо голоморфных функций в S, наделенная топологией компактной сходимости.

§ 5

1) Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра, $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A. Показать, что тогда $\mathfrak{J}$ и $A/\mathfrak{J}$ являются регулярными коммутативными банаховыми алгебрами.

2) Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала, $\mathfrak{J}$ — некоторый идеал в A, χ — точка в $h(\mathfrak{J})$, $\mathfrak{J}$ — множество всех $x \in A$, таких, что $\mathscr{G}x$ имеет компактный носитель, не пересекающийся с $\{\chi\}$. Показать, что тогда $\mathfrak{J} + \mathfrak{J}$ — наименьший идеал $\mathfrak{K}$ в A, такой, что $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{J}$ и $h(\mathfrak{K}) = \{\chi\}$.

3) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, A' — банахово пространство, двойственное к A. Для каждого элемента $x \in A$ обозначим через $\rho(x)$ линейный оператор в A', сопряженный к оператору умножения на x в A. Для $x \in A$ и $x' \in A'$ положим $x * x' = \rho(x) \cdot x'$. Векторное подпространство в A' называется инвариантным, если оно инвариантно относительно всех операторов $\rho(x)$.

Показать, что

a) Для того чтобы элемент x' из A' был пропорционален некоторому ненулевому характеру алгебры A, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $\mathbf{C}x'$ было инвариантным.

b) Отображение $V \longmapsto V^0$ является биекцией множества замкнутых идеалов в A на множество слабо замкнутых инвариантных подпространств в A'.

c) Если W — слабо замкнутое векторное подпространство, порожденное W_1 и W_2, где W_1 и W_2 — инвариантные слабо замкнутые подпространства из A', то $\sigma(W) = \sigma(W_1) \cup \sigma(W_2)$ (где через $\sigma(W)$ обозначено множество характеров, принадлежащих инвариантному векторному подпространству W в A'. (Применить b).)

d) Если W — слабо замкнутое инвариантное векторное подпространство в A', то $\sigma(W)$ совпадает с множеством всех таких $\chi \in \widehat{A}$, для которых из равенства $x * x' = 0$ при всех $x' \in W$ следует равенство $\langle x, \chi \rangle = 0$.

e) Если A содержит единичный элемент, то каждое слабо замкнутое инвариантное векторное подпространство в A' содержит по крайней мере один ненулевой характер.

Предполагая далее в этом упражнении, что A — регулярная алгебра без радикала, содержащая единичный элемент, показать, что

f) Если W — слабо замкнутое инвариантное векторное подпространство в A', а U — какая-нибудь окрестность множества $\sigma(W)$ в $X(A)$, то W содержится в слабо замкнутом векторном подпространстве из A', порожденном элементами из U.

g) Если элемент $x \in A$ таков, что $\mathscr{G}x = 1$ в некоторой окрестности $\sigma(x')$, где $x' \in A'$ и $\sigma(x') = \sigma(W)$, а W — слабо замкнутое инвариантное векторное подпространство в A', порожденное элементом x', то $x * x' = x'$. (Применить f).)

h) Если $\sigma(x')$ — объединение двух непересекающихся замкнутых множеств σ_1 и σ_2, то существуют $x'_1, x'_2 \in A'$, такие, что $\sigma(x'_1) = \sigma_1$, $\sigma(x'_2) = \sigma_2$, $x' = x'_1 + x'_2$. (Выбрать $x'_1 = u_1 * x'$, $x'_2 = u_2 * x'$, где $\mathscr{G}u_1 = 1$ (соответственно 0) в окрестности σ_1 (соответственно σ_2), $\mathscr{G}u_2 = 1$ (соответственно 0) в окрестности σ_2 (соответственно σ_1).)

4) Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала, удовлетворяющая условию Диткина, $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A, $x \in \mathfrak{k}(h(\mathfrak{J}))$, F — гранвца множества $h(Ax)$. Показать, что если $F \cap h(\mathfrak{J})$ не содержит непустых совершенных множеств, то $x \in \mathfrak{J}$ (воспроизвести доказательство предложения 5).

5) Пусть A — регулярная коммутативная банахова алгебра без радикала. Предположим, что каждый замкнутый идеал алгебры A является пересечением регулярных максимальных идеалов. Пусть $x \in A$. Пусть F — множество нулей $\mathscr{G}x$. Показать, что тогда элемент x является пределом при $n \to \infty$ последовательности элементов вида $u_n x$, где $u_n \in A$ и $\mathscr{G}u_n$ равно нулю в окрестности множества F. (Пусть $\mathfrak{J}$ — множество всех элементов $y \in A$, таких, что $\mathscr{G}y$ имеет компактный носитель, не пересекающийся с F. Тогда $x \in \overline{\mathfrak{J}}$. Применить предложение 4.) В частности, алгебра A удовлетворяет условию Диткина.

6) Пусть B — алгебра комплексных непрерывно дифференцируемых функций на интервале $(0, 1)$, снабженная нормой $\|f\| = \sup |f| + \sup |f'|$. Пусть A — замкнутая подалгебра в B, состоящая из тех $f \in B$, для которых $f(1/2) = 0$. Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в A, состоящий из тех $f \in A$, для которых $f'(1/2) = 0$. Показать, что

a) Пространство $X(A)$ отождествляется с $(0, 1) - \{1/2\}$ и алгебра A регулярна.

b) $\mathfrak{J}$ — нерегулярный максимальный идеал алгебры A.

7) a) Пусть R — множество точек (z_1, z_2, z_3, z_4) в $\mathbf{C}^4$, таких, что

$$z_1 z_2 = 2, \quad 1 \leqslant |z_1| \leqslant 2, \quad z_3 = z_4 = 0,$$

Определим аналогично множества T_1 и T_2 с помощью следующих условий:

$$T_1: \quad z_1z_2=2, \quad |z_1|=1, \quad |z_3|\leqslant 1, \quad z_4=0,$$

$$T_2: \quad z_1z_2=2, \quad |z_1|=2, \quad |z_3|\leqslant 1, \quad z_4=z_3^2.$$

Показать, что множество $X=R\cup T_1\cup T_2$ полиномиально выпукло. (Показать, что X есть множество точек (z_1, z_2, z_3, z_4), таких, что

$$z_1z_2=2, \quad |z_1|\leqslant 2, \quad |z_2|\leqslant 2, \quad |z_3|\leqslant 1, \quad z_4(z_4-z_3^2)=0,$$

$$|z_4z_2^k|\leqslant 1 \quad \text{и} \quad |z_1^k(z_4-z_3^2)|\leqslant 1 \quad \text{для} \quad k=1, 2, \ldots.)$$

Пусть A — замкнутая подалгебра в $\mathscr{C}(X)$, порожденная суженнями на X многочленов на $\mathbf{C}^4$. Показать, что X отождествляется с $\mathrm{X}(A)$.

b) Пусть Γ_1, $\Gamma_2\subset\mathbf{C}$ — ориентированные в положительном направлении окружности с центром в 0 радиусов 1 и 2. Пусть μ_0, μ_1, ν — меры на Γ_1, Γ_2, Γ_1, определенные с помощью форм dz/z, $-dz/z$, dz/z^2. Пусть, далее, $\mu=\mu_0+\mu_1$, так что $\mu\otimes\nu$ — мера на $(\Gamma_1\cup\Gamma_2)\times\Gamma_1$. Обозначим через B множество точек $z=(z_1, \ldots, z_4)\in X$, таких, что $(z_1, z_3)\in (\Gamma_1\cup\Gamma_2)\times\Gamma_1$. Отображение $z\longmapsto(z_1, z_3)$ из B в $(\Gamma_1\cup\Gamma_2)\times\Gamma_1$ является гомеоморфизмом; обозначим его φ. Пусть ρ — мера вида $\varphi^{-1}(\mu\otimes\nu)$. Показать, что мера ρ ортогональна к алгебре A.

c) Пусть g — функция на X, равная нулю на $R\cup T_1$ и z_3 на T_2. Показать, что тогда $\int g\,d\rho\neq 0$ и, стало быть, $g\notin A$. Однако для каждого значения $z\in X$ функция g совпадает в окрестности точки z с некоторым элементом из A.

§ 6

1) Пусть A — нормированная алгебра, наделенная непрерывной инволюцией. Если положить $\|x\|'=\sup(\|x\|, \|x^*\|)$ для каждого элемента $x\in A$, то A снова оказывается инволютивной нормированной алгеброй и новая норма эквивалентна старой.

2) Пусть A — коммутативная банахова алгебра без радикала. Показать, что каждая инволюция алгебры A непрерывна. (Применить § 3, предл. 6.)

¶ 3) Пусть A — инволютивная коммутативная банахова алгебра с единицей, все характеры которой эрмитовы. Предположим, что для каждого необратимого эрмитова элемента $x\in A$ имеет место соотношение $\|(x-\lambda)^{-1}\|=o(\mathscr{I}(\lambda)^{-2})$ при $\lambda\to 0$ и $\mathscr{I}(\lambda)\neq 0$. Показать, что тогда каждый замкнутый идеал $\mathfrak{J}$ алгебры A есть пересечение максимальных идеалов. (Пусть φ: $A\to A/\mathfrak{J}$ — канонический морфизм. Пусть элемент $x\in A$ таков, что $\varphi(x)$ принадлежит радикалу алгебры $A/\mathfrak{J}$. Достаточно доказать, что $\varphi(x)=0$. Но этот факт сводится к случаю, когда элемент x эрмитов. Использовать упр. 23 c) к § 2.)

4) Пусть A — инволютивная коммутативная банахова алгебра с единицей. Показать, что для того, чтобы каждый ее характер был эрмитов, необходимо и достаточно, чтобы элемент $1+xx^*$ был обратим для каждого $x\in A$. (Если каждый характер алгебры A эрмитов, то $\mathscr{I}(1+xx^*)>0$ всюду на $\mathrm{X}(A)$. Если некоторый характер χ в A не эрмитов, то существует эрмитов элемент $x\in A$, такой, что $\chi(x)=i$, откуда $\chi(1+xx^*)=0$, и элемент $1+xx^*$ не обратим.)

5) Пусть A — коммутативная банахова алгебра, наделенная инволюцией, такой, что $\|x^*x\|=\|x\|\cdot\|x^*\|$ для каждого элемента $x\in A$. Показать, что тогда A есть C^*-алгебра. (Так как $\|y^2\|=\|y\|^2$ для эрмитова

элемента y, то $\|y\| = \rho(y)$; замечая, что $\mathrm{Sp}'\, x^* = \overline{\mathrm{Sp}'\, x}$ для каждого $x \in A$, получаем

$$\|x^*\| \cdot \|x\| = \|x^* x\| = \rho(x^* x) \leqslant \rho(x^*)\,\rho(x) = \rho(x^2) \leqslant \|x\|^2,$$

откуда $\|x^*\| \leqslant \|x\|$ и $\|x^*\| = \|x\|$.)

6) Пусть A есть C^*-алгебра, N — множество ее нормальных элементов, $x \in N$, V — некоторая окрестность нуля в $\mathbf{C}$. Показать, что существует окрестность U точки x в N, такая, что для каждого элемента $y \in U$ имеют место соотношения $\mathrm{Sp}\, y \subset \mathrm{Sp}\, x + V$ и $\mathrm{Sp}\, x \subset \mathrm{Sp}\, y + V$. (Применить следствие теоремы 1, предложение 3 из § 2 и предложенне 10 из § 4.)

7) Пусть A — коммутативная C^*-алгебра и $x \in A$. Предположим, что C^*-подалгебра в A, порожденная элементом x, совпадает с A. Показать, что тогда $\chi \longmapsto \chi(x)$ есть гомеоморфизм $X'(A)$ на $\mathrm{Sp}'\, x$.

8) Пусть A — банахова алгебра с единицей, $x \in A$ и $S = \mathrm{Sp}\, x$. Предположим, что существует морфизм φ из $\mathscr{C}(S)$ в A, который переводит 1 в 1 и z в x (через z обозначено тождественное отображение S). Показать, что тогда $\|\varphi(f)\| \geqslant \|f\|$ для каждой функции $f \in \mathscr{C}(S)$. В частности, если φ непрерывен, то φ взаимно непрерывен. (Можно считать алгебру A коммутативной. Пусть $\lambda \in S$. Существует характер $\chi \in X(A)$, такой, что $\lambda = \chi(x) = \chi(\varphi(z)) = (X(\varphi)(\chi))(z)$. Стало быть, $X(\varphi)(\chi)$ является характером $f \longmapsto f(\lambda)$ алгебры $\mathscr{C}(S)$. Пусть $f \in \mathscr{C}(S)$. Согласно сказанному выше, существует характер $\chi \in X(A)$, такой, что $|f|$ достигает своего максимума в точке $X(\varphi)(\chi)$. Тогда $|\chi(\varphi(f))| = \|f\|$ и, значит, $\|\varphi(f)\| \geqslant \|f\|$.)

9) Пусть G — локально компактная группа. Показать, что если $\mathrm{St}(G)$ содержит единичный элемент, то группа G дискретна. (Воспользоваться тем, что в гильбертовом пространстве $L^2(G)$ тождественное отображение есть предел по норме эндоморфизмов $\mathbf{v}(f)$, где $\mathbf{v}$ — левое регулярное представление и $f \in L^1(G)$.)

§ 7

1) Для каждого топологического пространства Ω обозначим через $\mathscr{B}(\Omega)$ алгебру ограниченных непрерывных комплексных функций на Ω, снабженную нормой $\|f\| = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|$ и инволюцией $f \longmapsto \tilde{f}$.

a) Показать, что $\mathscr{B}(\Omega)$ — коммутативная C^*-алгебра с единицей.

b) Для каждой точки $t \in \Omega$ и каждой функции $f \in \mathscr{B}(\Omega)$ положим $\chi_t(f) = f(t)$. Показать, что тогда $t \longmapsto \chi_t$ является непрерывным отображением φ (оно называется каноническим) из Ω в $X(\mathscr{B}(\Omega))$.

c) Показать, что если Ω вполне регулярно, то φ является гомеоморфизмом Ω на некоторое подпространство, плотное в $X(\mathscr{B}(\Omega))$. (Для доказательства равенства $\overline{\varphi(\Omega)} = X(\mathscr{B}(\Omega))$ показать, что непрерывная комплексная функция на $X(\mathscr{B}(\Omega))$, равная нулю на $\varphi(\Omega)$, есть тождественный нуль.) Показать, что $X(\mathscr{B}(\Omega))$ отождествляется с компактифнкацией Стоуна — Чеха пространства Ω (*Общ. топ.*, гл. IX, § 1, упр. 7).

d) Пусть A — банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{B}(\Omega)$ и R_A — отношение эквивалентиости в Ω:

$$f(t) = f(t') \quad \text{для всех} \quad f \in A.$$

Показать, что насыщение S компакта $K \subset \Omega$ по R_A замкнуто. (Пусть $t \in \overline{S}$; для каждой функции $f \in A$ и каждого $\varepsilon > 0$ пусть $V_{f,\varepsilon}$ — множе-

ство всех $t' \in \Omega$, таких, что $|f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon$; если $f_1, \ldots, f_n \in A$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$, то

$$V_{f_1, \varepsilon_1} \cap \ldots \cap V_{f_n, \varepsilon_n} \cap K \neq \varnothing;$$

следовательно, $\left(\bigcap_{f \in A,\, \varepsilon > 0} V_{f, \varepsilon}\right) \cap K \neq \varnothing$, откуда $t \in S$.)

e) Предположим, что пространство Ω нормально. Пусть R — отношение эквивалентности, заданное на Ω, и $A = A_R$ — подалгебра в $\mathscr{B}(\Omega)$, состоящая из функций, постоянных на классах эквивалентности по R. Показать, что $R = R_A$. (Использовать *Общ. топ.*, гл. IX, § 4, упр. 15.)

f) Предположим, что Ω — компакт. Показать, что тогда $R \longmapsto A_R$ является биективным отображением множества отношений эквивалентности, разбивающих Ω, на множество C^*-подалгебр в $\mathscr{C}(\Omega)$. (Пусть A есть C^*-подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$ и $R = R_A$. Показать, что R разбивает Ω, и применить теорему Стоуна — Вейерштрасса к алгебре функций, непрерывных на Ω/R, полученной из A переходом к факторалгебре.)

2) Пусть Ω — компакт, R — отношение эквивалентности, разбивающее Ω, B — замкнутая подалгебра в $\mathscr{C}(\Omega)$, содержащая A_R (обозначение из упр. 1). Показать, что если $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ совпадает на каждом классе эквивалентности c с некоторым элементом g_c из B, то $f \in B$. (Пусть $\varepsilon > 0$. Существует открытая насыщенная окрестность V_c точки c, такая, что $|f g_c| \leqslant \varepsilon$ на V_c. Пусть $V_{c_1}, \ldots, V_{c_n}$ — покрытие Ω. Пусть $(u_1, \ldots, u_n)$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $(V_{c_1}, \ldots, V_{c_n})$ и состоящее из функций алгебры A_R. Тогда

$$g = u_1 g_{c_1} + \ldots + u_n g_{c_n} \in B$$

и $|f - g| \leqslant \varepsilon$ всюду на Ω.)

3) Пусть Ω — компактное пространство и A_ω, для каждой точки $\omega \in \Omega$, — коммутативная банахова алгебра, содержащая единичный элемент e_ω с нормой, равной 1. Пусть B — банахова алгебра, состоящая из $(x_\omega) \in \prod_{\omega \in \Omega} A_\omega$, таких, что $\|x\| = \sup_{\omega \in \Omega} \|x_\omega\| < +\infty$. Пусть C — банахова подалгебра в B, обладающая следующими свойствами:

(i) $e = (e_\omega)_{\omega \in \Omega} \in C$;

(ii) если $x = (x_\omega) \in C$ и $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, то функция $\omega \longmapsto f(\omega) x_\omega$ является элементом C;

(iii) для каждого $x = (x_\omega) \in C$ функция $\omega \longmapsto \|x_\omega\|$ полунепрерывна сверху.

Пусть X — сумма всех множеств вида $\mathrm{X}(A_\omega)$. Для каждого характера $\chi \in \mathrm{X}(A_\omega)$ пусть $\varphi(\chi)$ — характер алгебры C, определенный равенством $\varphi(\chi)((x_\omega)) = \chi(x_{\omega_0})$. Показать, что φ определяет биекцию множества X на $\mathrm{X}(C)$. (Пусть $\xi \in \mathrm{X}(C)$. Так как $\mathscr{C}(\Omega)$ можно отождествить с банаховой подалгеброй в C, то ξ определяет некоторый характер алгебры $\mathscr{C}(\Omega)$ и, стало быть, некоторую точку $\omega_0 \in \Omega$. Пусть $x = (x_\omega) \in C$ и $y = (y_\omega) \in C$, причем $x_{\omega_0} = y_{\omega_0}$; пусть $\varepsilon > 0$; имеем $\|x_\omega - y_\omega\| < \varepsilon$ в некоторой окрестности U точки ω_0; пусть функция $f\colon \Omega \to (0, 1)$ равна 1 в точке ω_0 и 0 вне U; тогда выполняется неравенство $\|fx - fy\| \leqslant \varepsilon$ из которого следует, что $|\xi(fx - fy)| \leqslant \varepsilon$, откуда $|\xi(x) - \xi(y)| \leqslant \varepsilon$ и, значит, $\xi(x) = \xi(y)$. Отсюда заключаем, что существует характер $\chi \in \mathrm{X}(A_{\omega_0})$, такой, что $\xi = \varphi(\chi)$.)

4) Пусть Ω — компактное пространство, такое, что банахова алгебра $\mathscr{C}(\Omega)$ оказывается порожденной некоторой последовательностью $(j_1, j_2, \ldots)$ идемпотентов. Показать, что тогда функция

$$\omega \longmapsto h(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\left(2j_n(\omega) - 1\right)$$

разделяет точки пространства Ω и, следовательно, порождает банахову алгебру $\mathscr{C}(\Omega)$.

5) Пусть A — банахова алгебра, определенная в § 2, n° 2, пример 2. Пусть $\omega \in (0, 1) = X(A)$. Показать, что наименьший замкнутый идеал $\mathfrak{J}_\omega$ алгебры A, такой, что $h(\mathfrak{J}) = \{\omega\}$, совпадает с множеством всех элементов $f \in A$, для которых $f, f', \ldots, f^{(n)}$ равны нулю в точке ω. (Воспользоваться § 5, предл. 4.) Показать, далее, что если $g \in A$, то его канонический образ в факторалгебре $A/\mathfrak{J}_\omega$ имеет норму $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{|g^{(k)}(\omega)|}{k!}\right)$. Алгебра $A/\mathfrak{J}_\omega$ изоморфна алгебре $\mathbf{C}[X]/(X^{n+1})$. Единственный максимальный идеал в A, содержащий $\mathfrak{J}_\omega$, совпадает с множеством всех элементов $f \in A$, таких, что $f(\omega) = 0$.

6) Пусть Δ — круг $|\zeta| \leqslant 1$ в $\mathbf{C}$ и A — банахова алгебра, определенная в § 2, n° 2, пример 5.

a) Показать, что если $x \in A$, то x является пределом в A при $n \to \infty$ функций вида

$$\zeta \longmapsto x_n(\zeta) = x\left(\frac{n\zeta}{n+1}\right).$$

Но x_n является равномерным пределом многочленов, поэтому ζ — образующая алгебры A.

b) Показать, что $X(A)$ канонически отождествляется с Δ. (Применить предложение 1 (vii).)

c) Пусть S — замкнутая часть в Δ. Показать, что если S содержит хотя бы одну неизолированную точку, то замыкание S в топологии Джекобсона совпадает с Δ.)

d) Пусть $x \in A$; положим $x^*(\zeta) = \overline{x(\zeta)}$. Показать, что отображение $x \longmapsto x^*$ является изометрической инволюцией алгебры A, и только те характеры в A эрмитовы относительно этой инволюции, которые определяются вещественными точками Δ.

e) Отображение $x \longmapsto x|\mathbf{U}$ есть изоморфизм из A на $P(\mathbf{U})$. Показать, что каждая функция из $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\mathbf{U})$ является равномерным пределом вещественных частей фувкций из $P(\mathbf{U})$.

7) Пусть A_1 (соответственно A_2) — банахова алгебра с единицей, рассмотренная в § 2, n° 2, пример 2 (соответственно 5) и $A = A_1 \times A_2$. Показать, что A — алгебра без радикала, но множество $\mathscr{G}_A(A)$ не является ни замкнутым, ни плотным в $\mathscr{C}(X(A))$. (Применить упражнение 6.)

¶ 8) Пусть Ω — компактное пространство, B — банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{C}(\Omega)$ (относительно индуцированной нормы), разделяющая точки Ω. Можно отождествить Ω с некоторой замкнутой частью пространства $X(B) = \Omega'$. Пусть B^* — множество всех обратимых элементов в B. Алгебру B называют log-*модулярной*, если множество всех функций вида $\log|f|$, где $f \in B$, плотно в $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$. (В частности, алгебра B log-модулярна, если функции вида $\mathscr{R}f$, где f пробегает B, плотны в $\mathscr{C}_{\mathbf{R}}(\Omega)$. В самом деле, $\log|e^f| = \mathscr{R}f$.) В дальнейшем предполагается, что алгебра B log-модулярна.

a) Показать, что для каждого характера $\chi \in \Omega'$ существует и притом единственная мера $\mu_\chi \geqslant 0$ на Ω, такая, что

$$\log|\chi(f)| = \int_\Omega \log|f(\omega)|\, d\mu_\chi(\omega)$$

для каждой функции $f \in B^*$, и, стало быть, такая, что $\chi(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu_\chi(\omega)$ для каждой функции $f \in B$. Имеет место неравенство

$$\log|\chi(f)| \leqslant \int_\Omega \log|f(\omega)|\, d\mu_\chi(\omega)$$

для каждой функции $f \in B$. Условие $\chi(f) = \int_\Omega f(\omega)\, d\mu_\chi(\omega)$ для каждой функции $f \in B$ однозначно определяет меру μ_χ.

b) Пусть $\chi \in \Omega'$. Пусть, далее, μ — положительная мера на Ω, причем $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где μ_1 — абсолютно непрерывная, а μ_2 — сингуляриая компонента относительно μ_χ. Пусть $\mathfrak{J}$ — ядро χ. Показать, что тогда

$$\inf_{f\in\mathfrak{J}} \int_\Omega |1-f|^2\, d\mu = \inf_{f\in\mathfrak{J}} \int_\Omega |1-f|^2\, d\mu_1.$$

c) Если $\chi \in \Omega'$, h — неотрицательная функция из $\mathscr{L}^1(\mu_\chi)$, $\mathfrak{J}$ — ядро характера χ, то имеет место равенство

$$\inf_{f\in\mathfrak{J}} \int_\Omega |1-f|^2 h\, d\mu_\chi = \exp\left(\int_\Omega (\log h)\, d\mu_\chi\right).$$

d) Обозначим через $H^p(\mu)$ замыкание канонического образа B в $L^p(\mu)$, где μ — положительная мера на Ω, $p \in [1, \infty[$. Пусть $\chi \in \Omega'$ и $\mathfrak{J}$ — ядро χ. Показать, что $L^2(\mu_\chi)$ — прямая (гильбертова) сумма пространства $H^2(\mu_\chi)$ и замыкания в $L^2(\mu_\chi)$ канонического образа множества $\overline{\mathfrak{J}}$ (состоящего из всех функций, сопряженных к функциям из $\mathfrak{J}$).

e) Пространство $H^1(\mu_\chi)$ есть множество классов $\tilde{h}$ функций $h \in \mathscr{L}^1(\mu_\chi)$, таких, что $\int_\Omega fh\, d\mu_\chi = 0$ для всех функций $f \in \mathfrak{J}$.

f) Если h — неотрицательная функция из $\mathscr{L}^1(\mu_\chi)$, то равенство $\tilde{h} = |\tilde{f}|$, где $\tilde{f} \in H^1(\mu_\chi)$ и $\int_\Omega f\, d\mu_\chi \neq 0$, имеет место в том и только в том случае, когда $\log h \in \mathscr{L}^1(\mu_\chi)$.

¶9) Пусть Ω — компактное пространство, B — банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{C}(\Omega)$ (относительно индуцированной нормы). Каждый элемент ω из Ω определяет характер χ_ω алгебры B. Если $\omega, \omega' \in \Omega$, то мы будем писать $\omega \sim \omega'$ в том случае, когда $\|\chi_\omega - \chi_{\omega'}\| < 2$.

a) Пусть $\omega, \omega' \in \Omega$. Показать, что если существует последовательность (f_n) элементов из B, таких, что $\|f_n\| \leqslant 1$, $|f_n(\omega)| \to 1$ при $n \to \infty$ и $\liminf_{n\to\infty} |f_n(\omega) - f_n(\omega')| > 0$, то соотношение $\omega \sim \omega'$ не имеет места. (Можно считать, что $f_n(\omega) \to 1$. Рассмотрим $g_n = (f_n - \lambda_n)(1 - \lambda_n f_n)^{-1}$, где λ_n — некоторая последовательность чисел из интервала $]0, 1[$, стре-

мящихся к 1. Имеет место неравенство $\|g_n\| \leqslant 1$. Если последовательность (λ_n) выбрать надлежащим образом, то можно добиться того, чтобы $g_n(\omega) \to 1$ и $g_n(\omega') \to -1$.)

b) Пусть R — множество вещественных частей элементов из B. Показать, что если $\omega \sim \omega'$, то существует такое число $c \in]0, 1[$, что для каждой неотрицательной функции f из R имеет место неравенство $f(\omega) \geqslant cf(\omega')$. (В противном случае существует последовательность функций $f_1, f_2, \ldots \in R$, таких, что $f_n \geqslant 0$, $f_n(\omega') = 1$ и $f_n(\omega) \to 0$ при $n \to \infty$; пусть $g_n \in B$ и $\mathscr{R}g_n = f_n$. Тогда $e^{-g_n} \in B$, $\|e^{-g_n}\| \leqslant 1$, $|e^{-g_n(\omega')}| = 1/e$, $|e^{-g_n(\omega)}| \to 1$ при $n \to \infty$, а это противоречит а).) Можно также предполагать, что $f(\omega') \geqslant cf(\omega)$ для каждой неотрицательной функции f из R. Существуют неотрицательные меры α и β на Ω, такие, что $f(\omega) - cf(\omega') = \alpha(f)$ и $f(\omega') - cf(\omega) = \beta(f)$ для $f \in R$. Положим $\mu_\omega = (1 - c^2)^{-1}(c\beta + \alpha)$, $\mu_{\omega'} = (1 - c^2)^{-1}(c\alpha + \beta)$. Показать, что $\mu_\omega(f) = f(\omega)$ и $\mu_{\omega'}(f) = f(\omega')$ для любой функции $f \in B$ и, кроме того,

$$c\mu_\omega \leqslant \mu_{\omega'}, \quad c\mu_{\omega'} \leqslant \mu_\omega.$$

c) Предположим снова, что $\omega \sim \omega'$. Показать, что если μ — положительная мера на Ω, такая, что $\mu(f) = f(\omega)$ для всех функций $f \in B$, то существует положительная мера μ' на Ω, такая, что $\mu'(f) = f(\omega')$ для всех функций $f \in B$ и $c\mu \leqslant \mu'$ для некоторого $c \in]0, 1[$. (В соответствии с обозначениями из b) положить $\mu' = \mu_{\omega'} - c\mu_\omega + c\mu$.)

d) Показать, что отношение $\omega \sim \omega'$ является отношением эквивалентности в Ω. (Применить c).)

¶10) Пусть Ω — компактное пространство, A — банахова подалгебра с единицей в $\mathscr{C}(\Omega)$ (относительно индуцированной нормы).

a) Часть K в Ω называется антисимметрической (отиосительно A), если каждая функция $f \in A$, вещественная на K, постоянна на K. Показать, что каждая антисимметрическая часть содержится в некоторой максимальной антисимметрнческой части. Максимальная антисимметрическая часть замкнута. Множество $\mathfrak{K}$ максимальных антисимметрических частей является разбиением Ω.

b) Пусть $A^\perp$ — подпространство банахова пространства комплексных мер на Ω, ортогональное к A. Пусть μ — экстремальная точка единичного шара в $A^\perp$. Показать, что (минимальный) носитель μ антисимметрнчен.

c) Пусть $f \in \mathscr{C}(\Omega)$. Показать, что если $f \mid K \in A \mid K$ для любого $K \in \mathfrak{K}$, то $f \in A$. (Применить b) н теорему Крейна — Мильмана.) Найти на этом пути доказательство теоремы Стоуна — Вейерштрасса.

d) Часть E в Ω называется пиком (относительно A), если существует функция $f \in A$, такая, что $\|f\| = 1$ и E — множество всех тех точек $\omega \in \Omega$, для которых $f(\omega) = 1$. Тогда можно считать, что $|f(x)| < 1$ для $x \notin E$ (заменяя f на $(1 + f)/2$). Показать, что любое счетное непустое пересечение пиков есть пик, и если E_1 и E_2 — пики, то $E_1 \cup E_2$ есть пик. (Пусть $f_1, f_2 \in A$ и $f_i = 1$ на E_i, $|f_i| < 1$ на $\Omega - E_i$; пусть $g_i = \frac{1}{4}(1 - f_i)^{1/3} \in A$; тогда $1 - g_1 g_2 = 1$ на $E_1 \cup E_2$, $|1 - g_1 g_2| < 1$ на $\Omega - (E_1 \cup E_2)$.)

e) Пусть E — пересечение пиков. Пусть $\mathfrak{I}$ — множество всех функцнй $f \in A$, равных нулю на E. Показать, что тогда отображение $f \mapsto f \mid E$ определяет изометрию из $A/\mathfrak{I}$ на $A \mid E$.

f) Пусть E — некоторый пик. Пусть $E' \subset E$ — некоторый пик относительно $A \mid E$. Показать, что тогда E' — пик относительно A.

g) Показать, что каждая часть $K \in \mathfrak{K}$ является пересечением циков. (Применить d) и f).)

h) Показать, что если $K \in \mathfrak{K}$, то $A|K$ замкнуто в $\mathscr{C}(K)$. (Применить e) и g).)

i) Пусть R — множество вещественных частей элементов из A. Предположим, что $\Omega \in \mathfrak{K}$ и что R инвариантно относительно умножения. Показать, что Ω сводится тогда к точке. (Пусть $x_0 \in \Omega$. Для элемента $u \in R$ существует и притом единственная функция $f \in A$, такая, что $u = \mathscr{R}f$ и $f(x_0) \in \mathbf{R}$; положим $N(u) = \|f\|$. Тогда R — вещественное банахово пространство относительно N; теорема о замкнутом графике показывает, что умножение в R раздельно непрерывно и, стало быть, непрерывно. Множество $S = R + iR$ можно наделить структурой банаховой алгебры. Пусть $p \in R$ и $p(\omega) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$. Показать, что для каждого характера χ в S имеет место неравенство $\mathscr{R}\chi(p) > 0$, и вывести отсюда, что $\log p \in R$. Предполагая, что $\Omega \neq \{x_0\}$, можно построить функцию $f \in A$, такую, что $0 < \mathscr{R}f \leqslant 1$ на Ω, $f(x_0) \in \mathbf{R}$ и норма $\|f\|$ сколь угодно велика. Согласно сказанному выше, существует функция $V \in A$, такая, что $|V|^2 = \mathscr{R}f$. Имеет место неравенство $\|V\| \leqslant 1$, следовательно, $N(\mathscr{R}V) \leqslant 2$, но норма

$$N((\mathscr{R}V)^2) \geqslant \frac{1}{2}(\|V^2 + f\| - |\mathscr{I}V^2(x_0)|)$$

сколь угодно велика.)

j) Показать, что если R инварнантно относительно умножения, то $A = \mathscr{C}(\Omega)$. (Применить a), c), h), i).) Следовательно, если $A \neq \mathscr{C}(\Omega)$, то существует элемент $u \in R$, такой, что $u^2 \notin R$.

ГЛАВА II

КОММУТАТИВНЫЕ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

Всюду в этой главе через G обозначается коммутативная локально компактная группа, снабженная мерой Хаара; последняя будет обозначаться, если не оговорено противное, через dx. Пространства $L^p(G, dx)$ будут обозначаться $L^p(G)$.

§ 1. Преобразование Фурье

1. *Унитарные характеры коммутативной локально компактной группы*

Определение 1. *Унитарным характером группы G называется непрерывное представление G в мультипликативной группе* $\mathbf{U}$ *комплексных чисел, равных по модулю* 1.

Другими словами, унитарный характер — это непрерывная комплексная функция χ на G, такая, что

$$\chi(xy) = \chi(x)\chi(y), \quad |\chi(x)| = 1 \quad (x, y \in G).$$

Заметим, что каждое *ограниченное* непрерывное представление группы G в $\mathbf{C}^*$ является на самом деле унитарным характером.

Ясно, что произведение двух унитарных характеров, обратный к унитарному характеру, а также функция, тождественно равная 1, суть унитарные характеры. Следовательно, множество $\hat{G}$ всех унитарных характеров группы G образует *группу* относительно умножения, причем эта группа *коммутативна*. С другой стороны, отображение $(\chi, \chi') \mapsto \chi\chi'^{-1} = \chi\bar{\chi}'$ непрерывно в топологии *компактной сходимости*, и группа $\hat{G}$, снабженная топологией компактной сходимости, становится *топологической группой*.

Определение 2. *Топологическая группа $\hat{G}$ называется двойственной к группе G.*

Так как группа G локально компактна, то отображение $(x, \hat{x}) \mapsto \hat{x}(x)$ *непрерывно на произведении* $G \times \hat{G}$ (*Общ. топ.*, гл. X, 2-е изд., § 2, теор. 2).

Пусть H — гильбертово пространство размерности 1 и χ — некоторый унитарный характер группы G. Отображение, которое каждому $x \in G$ ставит в соответствие гомотетию в H с коэффициентом $\chi(x)$, является изометрическим непрерывным линейным представлением группы G в H. Обратно, каждое изометрическое непрерывное линейное представление группы G в H получается таким способом. Положим тогда для $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$

$$\chi(\mu) = \int_G \chi(x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Из предложения 11, *Интегр.*, гл. VIII, § 3, следует, что отображение $\mu \mapsto \chi(\mu)$ является ненулевым *характером* инволютивной банаховой алгебры $\mathscr{M}^1(G)$. Таким образом определяется отображение, называемое *каноническим*, группы $\hat{G}$ в $\mathrm{X}(\mathscr{M}^1(G))$. Кроме того, имеет место равенство

$$\chi(\mu^*) = \int_G \chi(x^{-1})\, d\tilde{\mu}(x) = \int_G \overline{\chi(x)}\, d\tilde{\mu}(x) = \overline{\chi(\mu)}$$

и характер $\mu \mapsto \chi(\mu)$ является *эрмитовым*.

Сужение этого характера на инволютивную банахову подалгебру $L^1(G)$ дает эрмитов характер ζ_χ алгебры $L^1(G)$; для каждой функции $f \in L^1(G)$ имеет место равенство

$$\zeta_\chi(f) = \int f(x)\chi(x)\, dx. \tag{2}$$

Заметим, что $\zeta_\chi \neq 0$: если функция $f \in \mathscr{K}(G)$ стремится к мере Дирака ε_e в пространстве $\mathscr{D}'(G)$, снабженном слабой топологией (*Интегр.*, гл. VIII, § 2, следствие 1 леммы 4), то $\zeta_\chi(f)$ стремится к $\chi(\varepsilon_e) = 1 \neq 0$.

Предложение 1. *Отображение* $j\colon \chi \mapsto \zeta_\chi$ *есть гомеоморфизм группы* $\hat{G}$ *на* $\mathrm{X}(L^1(G))$.

В самом деле, так как $\hat{G}$ — ограниченная часть в $L^\infty(G)$, то инъекция $\hat{G}$ в пространство L^∞, снабженное слабой топологией $\sigma(L^\infty, L^1)$, непрерывна. Стало быть, отображение j *непрерывно*. Если $\chi \in \hat{G}$ и $f \in L^1(G)$, то равенство

$$\zeta_\chi(\varepsilon_x * f) = \chi(x)\zeta_\chi(f)$$

показывает (при выборе такой функции f, что $\zeta_\chi(f) \neq 0$), что j — *инъективное* отображение.

Пусть $\zeta \in \mathrm{X}(L^1(G))$ и функция $f \in L^1(G)$ такова, что $\zeta(f) \neq 0$. Для $x \in G$ положим

$$\chi(x) = \zeta(\varepsilon_x * f)/\zeta(f). \tag{3}$$

Так как отображение $x \mapsto \varepsilon_x * f$ группы G в $L^1(G)$ непрерывно (*Интегр.*, гл. VIII, § 2, предл. 8), то функция χ *непрерывна*. В то же время из неравенства

$$|\chi(x)| \leqslant \|\varepsilon_x * f\|/|\zeta(f)| = \|f\|/|\zeta(f)|$$

следует, что она *ограничена*.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ — база фильтра окрестностей элемента e, состоящая из компактных окрестностей. Для каждой окрестности $V \in \mathfrak{B}$ пусть g_V — какая-нибудь положительная непрерывная функция, равная нулю вне V, с интегралом, равным 1. Известно (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, предл. 19), что

$$\varepsilon_x * f = \lim \varepsilon_x * g_V * f$$

(предел в пространстве $L^1(G)$ берется по фильтру). Так как $\zeta(\varepsilon_x * g_V * f) = \zeta(\varepsilon_x * g_V)\zeta(f)$, то

$$\chi(x) = \lim \zeta(\varepsilon_x * g_V),$$

и для каждой функции $h \in L^1(G)$

$$\zeta(\varepsilon_x * h) = \lim \zeta(\varepsilon_x * g_V * h) = (\lim \zeta(\varepsilon_x * g_V))\,\zeta(h) = \chi(x)\zeta(h).$$

Следовательно, для любых x, $y \in G$ имеет место равенство

$$\chi(xy) = \zeta(\varepsilon_x * \varepsilon_y * f)/\zeta(f) = \chi(x)\,\zeta(\varepsilon_y * f)/\zeta(f) = \chi(x)\chi(y),$$

и χ оказывается *унитарным характером* группы G. Кроме того, если $g \in L^1(G)$, то $g * f = \int (\varepsilon_x * f) g(x)\,dx$ в $L^1(G)$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 1, предл. 7), откуда

$$\zeta(g)\zeta(f) = \zeta(g * f) = \int \zeta(\varepsilon_x * f)\, g(x)\, dx =$$

$$= \zeta(f) \int \chi(x)\, g(x)\, dx = \zeta_\chi(g)\,\zeta(f)$$

и, стало быть, $\zeta = \zeta_\chi$. Таким образом, отображение j *сюръективно* и, следовательно, биективно.

Наконец, множество W всех элементов $\zeta' \in \mathrm{X}(L^1(G))$, таких, что $\zeta'(f) \neq 0$, есть *открытая окрестность* точки ζ в $\mathrm{X}(L^1(G))$. Если $\zeta' \in W$, то в силу сказанного ранее

$$j^{-1}(\zeta')(x) = \zeta'(\varepsilon_x * f)/\zeta'(f).$$

Пусть K — компактная часть группы G. Множество всех функций вида $\varepsilon_x * f$ для $x \in K$ является тогда компактом в $L^1(G)$. Так как $\mathrm{X}(L^1(G))$ ограничено и, стало быть, равно-

степенно непрерывно в $L^\infty(G)$, то $\zeta'(\varepsilon_x * f)$ сходится равномерно на K к $\zeta(\varepsilon_x * f)$, когда ζ' стремится к ζ по W (*Общ. топ.*, гл. X, 2-е изд., § 2, теор. 1). Отсюда немедленно следует, что отображение j^{-1} *непрерывно*, чем и завершается доказательство.

Теперь мы будем отождествлять каждый унитарный характер χ группы G с характером $f \mapsto \int f(x)\chi(x)\,dx$ алгебры $L^1(G)$.

Замечания. 1) Мы убедились в том, что отображение j биективно. На самом деле (это будет показано в другом выпуске) имеет место более общее утверждение о соответствии между непрерывными представлениями локально компактной группы H и непрерывными представлениями алгебры $L^1(H)$.

2) Каноническое отображение группы $\hat{G}$ в $\mathrm{X}(\mathscr{M}^1(G))$, вообще говоря, не является сюръективным (§ 2, упр. 14).

Следствие 1. *Каждый характер алгебры $L^1(G)$ эрмитов. Каноническое отображение пространства* $\mathrm{X}(\mathrm{St}(G))$ (гл. 1, § 6, n°7) *в* $\mathrm{X}(L^1(G))$ *является гомеоморфизмом.*

Первое утверждение — прямое следствие предыдущего. Второе вытекает из первого и следствия предложения 10, гл. I, § 6.

Следствие 2. *Топологическая группа $\hat{G}$ локально компактна.*

В дальнейшем мы будем отождествлять $\hat{G}$, $\mathrm{X}(L^1(G))$ и $\mathrm{X}(\mathrm{St}(G))$. Через $\langle \hat{x}, x\rangle$, где $x \in G$, $\hat{x} \in \hat{G}$, обозначим комплексное число $\hat{x}(x)$. Если $\langle \hat{x}, x\rangle = 1$, то говорят, что x и $\hat{x}$ ортогональны. Пусть A — некоторая часть G (соответственно $\hat{G}$); множество всех элементов группы $\hat{G}$ (соответственно G), ортогональных к A, является, очевидно, *замкнутой подгруппой* в $\hat{G}$ (соответственно G) и называется аннулятором A; мы будем обозначать его через $A^\perp$.

Для $x \in G$ отображение $\hat{x} \mapsto \langle \hat{x}, x\rangle$ есть унитарный характер $\eta(x)$ локально компактной коммутативной группы $\hat{G}$; этот факт немедленно следует из определения умножения в $\hat{G}$ и того обстоятельства, что отображение $(x, \hat{x}) \mapsto \langle \hat{x}, x\rangle$ непрерывно. Мы можем, таким образом, определить отображение η группы G в ее вторую двойственную группу $\hat{\hat{G}}$, называемое *каноническим* отображением. Отображение η оказывается непрерывным, и для любых $x, y \in G$ имеем

$\eta(xy) = \eta(x)\eta(y)$; это следует из непрерывности отображения $(x, \hat{x}) \mapsto \langle \hat{x}, x\rangle$ и предложения 9, *Общ. топ.*, гл. X, 2-е изд., § 2. Итак, *каноническое отображение* η *из* G *в* $\hat{\hat{G}}$, *определенное равенством*

$$\langle \eta(x), \tilde{A}\rangle = \langle \tilde{A}, x\rangle \qquad (x \in G,\ \tilde{A} \in \hat{G}),$$

является непрерывным морфизмом группы G *в* $\hat{\hat{G}}$. Мы увидим (теорема 2, n°5), что отображение η в действительности представляет собой *изоморфизм* группы G на $\hat{\hat{G}}$.

2. Определение преобразования Фурье

Определение 3. *Преобразованием Фурье меры* $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ *называется функция* $\mathcal{F}_G\mu = \mathcal{F}\mu$ (*обозначаемая иногда через* $\hat{\mu}$) *на* $\hat{G}$, *определенная равенством*

$$(\mathcal{F}\mu)(\hat{x}) = \int \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\, d\mu(x). \tag{4}$$

Копреобразованием Фурье меры μ *называют функцию* $\overline{\mathcal{F}}\mu$ *на* G, *определенную равенством*

$$(\overline{\mathcal{F}}\mu)(\hat{x}) = \int \langle \hat{x}, x\rangle\, d\mu(x). \tag{5}$$

Предложение 2. *Преобразование Фурье* $\mathcal{F}$ *и копреобразование Фурье* $\overline{\mathcal{F}}$ *являются морфизмами инволютивной алгебры* $\mathcal{M}^1(G)$ *в инволютивную алгебру ограниченных непрерывных функций на* $\hat{G}$.

Как мы видели в n°1, отображение $\mu \mapsto \int \langle \hat{x}, x\rangle\, d\mu(x)$ есть эрмитов характер алгебры $\mathcal{M}^1(G)$. Отсюда немедленно следует, что $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ — морфизмы инволютивной алгебры $\mathcal{M}^1(G)$ в инволютивную алгебру комплексных функций на $\hat{G}$. Кроме того,

$$|(\mathcal{F}\mu)(\hat{x})| = \left|\int \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\, d\mu(x)\right| \leqslant \|\mu\|_1, \tag{6}$$

откуда видно, что функции $\mathcal{F}\mu$ (и, аналогично, $\overline{\mathcal{F}}\mu$) ограничены. Наконец, если $\hat{x}$ стремится к $\hat{x}_0$ в $\hat{G}$, то функция $\hat{x}$ на G стремится к $\hat{x}_0$ равномерно на каждом компакте, оставаясь ограниченной числом 1. Отсюда следует, что $(\mathcal{F}\mu)(\hat{x})$ стремится к $(\mathcal{F}\mu)(\hat{x}_0)$ для каждой ограниченной меры μ. Следовательно, $\mathcal{F}\mu$ (и, аналогично, $\overline{\mathcal{F}}\mu$) непрерывны.

Отметим следующие полезные формулы:

$$(\mathcal{F}\mu)(\hat{x}) = (\mathcal{F}\mu)(\hat{x}^{-1}) = \overline{(\bar{\mathcal{F}}\bar{\mu})(\hat{x})}; \tag{7}$$

$$\|\mathcal{F}\mu\|_\infty = \|\bar{\mathcal{F}}\mu\|_\infty \leqslant \|\mu\|_1; \tag{8}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\varepsilon_x)(\hat{x}) &= \overline{\langle \hat{x}, x\rangle},\\ (\bar{\mathcal{F}}\varepsilon_x)(\hat{x}) &= \langle \hat{x}, x\rangle\end{aligned} \tag{9}$$

(в частности, $\mathcal{F}\varepsilon_e = \bar{\mathcal{F}}\varepsilon_e = 1$);

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(\varepsilon_x * \mu))(\hat{x}) &= \overline{\langle \hat{x}, x\rangle}(\mathcal{F}\mu)(\hat{x}),\\ (\bar{\mathcal{F}}(\varepsilon_x * \mu))(\hat{x}) &= \langle \hat{x}, x\rangle(\bar{\mathcal{F}}\mu)(\hat{x});\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\hat{x}\cdot\mu) &= \varepsilon_{\hat{x}} * \mathcal{F}\mu,\\ \bar{\mathcal{F}}(\hat{x}\cdot\mu) &= \varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \bar{\mathcal{F}}\mu.\end{aligned} \tag{11}$$

Из всех этих формул не очевидны разве лишь формулы (11). Они следуют из равенств

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(\hat{x}\cdot\mu))(\hat{y}) &= \int \overline{\langle \hat{y}, x\rangle}\langle \hat{x}, x\rangle\, d\mu(x) =\\ &= \int \overline{\langle \hat{y}\hat{x}^{-1}, x\rangle}\, d\mu(x) = (\mathcal{F}\mu)(\hat{y}\hat{x}^{-1}) = (\varepsilon_{\hat{x}} * \mathcal{F}\mu)(\hat{y}).\end{aligned}$$

Путем сужения на подалгебру $L^1(G)$ определяются преобразование Фурье и копреобразование Фурье на $L^1(G)$. Следовательно, для $f \in L^1(G)$ имеют место равенства

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)(\hat{x}) &= \int \overline{\langle \hat{x}, x\rangle} f(x)\, dx,\\ (\bar{\mathcal{F}}f)(\hat{x}) &= \int \langle \hat{x}, x\rangle f(x)\, dx.\end{aligned} \tag{12}$$

Каноническое отображение группы $\hat{G}$ в $\mathrm{X}(L^1(G))$ является гомеоморфизмом (предл. 1), и *копреобразование Фурье, если отождествить* $\hat{G}$ *и* $\mathrm{X}(L^1(G))$, *становится преобразованием Гельфанда.* Однако $\mathrm{X}(\mathcal{M}^1(G))$ не отождествляется с $\hat{G}$.

Предложение 3. *Преобразование Фурье и копреобразование Фурье суть инъективные морфизмы инволютивной алгебры* $L^1(G)$ *в инволютивную алгебру* $\mathcal{C}^0(\hat{G})$ *непрерывных функций, равных нулю на бесконечности в* $\hat{G}$.

Это утверждение вытекает из свойств преобразования Гельфанда (гл. I, § 3, предл. 2), предложения 2 и того обстоятельства, что $L^1(G)$ — алгебра без радикала.

Замечание. В отличие от преобразования Фурье на $\mathcal{M}^1(G)$, преобразование Фурье на $L^1(G)$ зависит от выбора

меры Хаара dx. При замене dx мерой $a\,dx\,(a>0)$ новое преобразование Фурье функции $f\in L^1(G)$ становится равным $a\cdot\mathscr{F}f$.

Рассмотрим C^*-алгебру $\mathrm{St}(G)$ группы G и отождествим $L^1(G)$ с некоторой плотной подалгеброй в $\mathrm{St}(G)$. В силу следствия 1 предложения 1 и теоремы 1, гл. I, § 6, преобразование Фурье и копреобразование Фурье продолжаются по непрерывности до *изоморфизма* C^*-алгебры $\mathrm{St}(G)$ на $\mathscr{C}^0(\hat{G})$, обозначения $\mathscr{F}$ и $\overline{\mathscr{F}}$ сохраняются; разумеется, изоморфизм $\mathscr{F}$ есть преобразование Гельфанда для $\mathrm{St}(G)$.

3. Теорема Планшереля

Обозначим через $A(G)$, или просто A, векторное подпространство в $L^1(G)$, порожденное функциями вида $f*g$, где f, $g\in L^1(G)\cap L^2(G)$. Так как $L^1\cap L^2$ — идеал в L^1, то A — идеал в L^1, содержащийся в $L^1\cap L^2$. Поскольку $(\check{x}f)*(\check{x}g)=\check{x}(f*g)$ для $x\in\hat{G}$, $f\in L^1$, $g\in L^1$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 3, предл. 6), то $\check{x}h\in A$ для всех $h\in A$.

Лемма 1. *Существует база фильтра* $\mathfrak{B}$ *на* $A\cap\mathscr{K}(G)$, *такая, что*

(i) $\varepsilon_e=\lim_{\mathfrak{B}}\varphi\,dx$ *в пространстве* $\mathscr{C}'(G)$, *снабженном топологией равномерной сходимости на компактных частях пространства* $\mathscr{C}(G)$;

(ii) $\lim_{\mathfrak{B}}\mathscr{F}\varphi=1$ *в топологии компактной сходимости на* $\hat{G}$ *и* $\|\mathscr{F}\varphi\|_\infty\leqslant 1$ *для каждой функции* φ, *принадлежащей какому-нибудь множеству из* $\mathfrak{B}$;

(iii) $\lim_{\mathfrak{B}}\varphi*f=f$ *в пространстве* $L^p(G)$ *для любого* $p\in]1,+\infty[$ *и каждой функции* $f\in L^p(G)$.

Действительно, пусть $\mathfrak{B}_0$ — база фильтра окрестностей элемента e в G, состоящая из симметричных компактных окрестностей, содержащихся в некотором фиксированном компактном множестве. Пусть $X\in\mathfrak{B}_0$ и X' — множество всех функций $\psi\in\mathscr{K}_+(G)$, таких, что $\operatorname{supp}\psi\subset X$ и $\int\psi(x)\,dx=1$; пусть X'' — множество всех элементов вида $\psi*\check{\psi}$ для $\psi\in X'$. Тогда $X''\subset A\cap\mathscr{K}(G)$, и множество $\mathfrak{B}$, состоящее из всех таких X'', является базой фильтра на $A\cap\mathscr{K}(G)$. Свойство (i) (соответственно (iii)) следует из *Интегр.*, гл. VIII, § 2, п° 7, след. 1 леммы 4 (соответственно § 4, п° 7, предл. 20). Компактная часть в $\hat{G}$ является компактной частью в $\mathscr{C}(G)$; следовательно, (i) влечет за собой равенство $\lim_{\mathfrak{B}}\mathscr{F}\varphi=1$ в топологии компактной сходимости на $\hat{G}$. Вторая часть утверждения (ii) очевидна.

Пусть f, $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Для каждой функции $\varphi \in \mathrm{St}(G)$ имеют место соотношения: $\varphi * f \in L^2(G)$, $\|\varphi * f\|_2 \leqslant \|\varphi\|_* \|f\|_2$ и $(\varphi * f) * g = \varphi * (f * g)$ (гл. I, § 6, п° 7, формула (13)). В силу *Интегр.*, гл. VIII, § 4, предл. 15, $\varphi * (f * g)$ есть функция из $\mathscr{C}^0(G)$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi * (f * g)\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_* \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Таким образом, для $f \in A$ и $\varphi \in \mathrm{St}(G)$ справедливо соотношение $\varphi * f \in \mathscr{C}^0(G)$ и $\varphi \mapsto (\varphi * f)(e)$ есть непрерывная линейная форма на $\mathrm{St}(G)$. Из того, что $\mathscr{F}$ — изоморфизм $\mathrm{St}(G)$ на $\mathscr{C}^0(\hat{G})$, вытекает

Лемма 2. *Для каждой функции $f \in A$ существует и притом единственная ограниченная мера μ_f на $\hat{G}$, такая, что для любой $f \in \mathrm{St}(G)$ справедливо равенство*

$$(\varphi * f)(e) = \int_{\hat{G}} (\mathscr{F}\varphi)\, d\mu_f. \tag{13}$$

Пусть теперь f, $g \in A$. Для любой функции $\varphi \in L^1(G)$ имеем тогда

$$(\mathscr{F}f \cdot \mu_g)(\mathscr{F}\varphi) = \int_{\hat{G}} (\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}f)\, d\mu_g = \int \mathscr{F}(\varphi * f)\, d\mu_g = \tag{14}$$
$$= ((\varphi * f) * g)(e).$$

Из того что $(\varphi * f) * g = (\varphi * g) * f$ и $\mathscr{F}(L^1(G))$ плотно в $\mathscr{C}^0(\hat{G})$, применяя (14), выводим равенство

$$(\mathscr{F}f) \cdot \mu_g = (\mathscr{F}g) \cdot \mu_f \quad (f, g \in A). \tag{15}$$

Пусть Ω_f — открытое множество в $\hat{G}$, состоящее из тех $\hat{x} \in \hat{G}$, для которых $(\mathscr{F}f)(\hat{x}) \neq 0$. Пусть φ — характеристическая функция множества $\hat{G} - \Omega_f$. Для каждой функции $g \in A$, учитывая (15) и *Интегр.*, гл. V, § 5, п° 3, теор. 1, имеем

$$\int (\mathscr{F}g)\, d(\varphi \cdot \mu_f) = \int \varphi (\mathscr{F}f)\, d\mu_g = 0.$$

В силу леммы 1, A плотно в $\mathrm{St}(A)$, следовательно, $\mathscr{F}(A)$ плотно в $\mathscr{C}^0(\hat{G})$; из этого замечания и предыдущего равенства выводим, что $\varphi \cdot \mu_f = 0$, т. е. что мера μ_f *сосредоточена на множестве* Ω_f. Пусть ν_f — мера на Ω_f плотности $(\mathscr{F}f)^{-1}$ по отношению к $\mu_f | \Omega_f$. В силу (15), $\nu_f | (\Omega_f \cap \Omega_g) = \nu_g | (\Omega_f \cap \Omega_g)$. Поскольку $\mathscr{F}(A)$ плотно в $\mathscr{C}^0(\hat{G})$, множества Ω_f для $f \in A$ образуют открытое покрытие $\hat{G}$. Далее, *существует единственная мера ν на $\hat{G}$, такая, что для каждой функции $f \in A$ имеет место равенство $\nu_f = \nu | \Omega_f$.*

Если $f \in A$, то

$$\mu_f = (\mathcal{F}f)\nu. \tag{16}$$

Действительно, каждая из частей равенства (16) представляет собой меру, сосредоточенную на Ω_f, и сужение каждой из этих мер на Ω_f совпадает с $(\mathcal{F}f)\cdot\nu_f$. В частности, $\mathcal{F}f \in L^1(\hat{G}, \nu)$. Напомним, что, с другой стороны, $\mathcal{F}f \in \mathscr{C}^0(\hat{G})$. Стало быть, $\mathcal{F}f \in L^2(\hat{G}, \nu)$.

Формула (13) может быть теперь записана следующим образом:

$$(\varphi * f)(e) = \int_{\hat{G}} (\mathcal{F}\varphi)(\mathcal{F}f)\, d\nu, \tag{17}$$

где $\varphi \in \mathrm{St}(G)$, $f \in A$. В частности, для f, $g \in A$

$$\int_{\hat{G}} (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)\, d\nu = (f * g)(e) = \int_G f(x)\, g(x^{-1})\, dx. \tag{18}$$

Покажем теперь, что мера ν инвариантна относительно сдвигов на группе $\hat{G}$. Пусть $\hat{x} \in \hat{G}$. При замене функций f и g из A на функции $\hat{x}\cdot f$ и $\hat{x}\cdot g$ интеграл $\int_G f(x)\, g(x^{-1})\, dx$ не изменится. Поэтому, в силу (18),

$$\nu((\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)) = \nu((\varepsilon_{\hat{x}} * \mathcal{F}f)(\varepsilon_{\hat{x}} * \mathcal{F}g)) =$$
$$= \nu(\varepsilon_{\hat{x}} * ((\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g))) = (\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu)((\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)).$$

Иначе говоря,

$$\mu_f(\mathcal{F}g) = (\mathcal{F}f \cdot (\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu))(\mathcal{F}g).$$

Отсюда, вспоминая, что $\mathcal{F}(A)$ плотно в $\mathscr{C}^0(\hat{G})$, выводим равенство

$$\mu_f = \mathcal{F}f \cdot (\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu),$$

справедливое для каждой функции $f \in A$. Таким образом, мера $\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu$ индуцирует на Ω_f меру ν_f и, значит, $\varepsilon_{\hat{x}^{-1}} * \nu = \nu$. Поэтому мера ν отличается лишь постоянным множителем от меры Хаара на $\hat{G}$. Формула (18), которую, полагая $g = \tilde{f}$, можно привести к виду

$$\int_{\hat{G}} |\mathcal{F}f|^2\, d\nu = \int_G |f|^2\, dx, \tag{19}$$

показывает, что этот множитель положителен. Стало быть, ν — *некоторая мера Хаара на* $\hat{G}$.

Определение 4. *Мера Хаара* ν *на* $\hat{G}$ *называется ассоциированной с исходной мерой Хаара на* G.

Впредь через $d\hat{x}$ мы будем обозначать меру Хаара на $\hat{G}$, ассоциированную с мерой dx.

Замечание. Если заменить меру dx мерой $a \cdot dx$, то свертка двух элементов f, $g \in L^1(G)$ заменится выражением $af * g$, а преобразование Фурье $\mathscr{F}f$ перейдет в $a\mathscr{F}f$. Поэтому μ_f не изменится, а мера ν перейдет в $a^{-1}\nu$. Стало быть, мера $dx \otimes d\hat{x}$ на $G \times \hat{G}$ не зависит от выбора меры Хаара dx.

Теорема 1 (Планшерель). *Если* $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, *то* $\mathscr{F}f \in L^2(\hat{G})$. *Отображение* $f \mapsto \mathscr{F}f$ *из* $L^1(G) \cap L^2(G)$ *в* $L^2(\hat{G})$ *однозначно продолжается до изометрии пространства* $L^2(G)$ *на* $L^2(\hat{G})$ (G *и* $\hat{G}$ *снабжены мерами* dx *и* $d\hat{x}$).

Для доказательства заметим, что в силу (19) сужение $\mathscr{F}$ на A представляет собой изометрию пространства $A \subset L^2(G)$ на подпространство $\mathscr{F}(A)$ в $L^2(\hat{G})$. Так как A плотно в $L^2(G)$ (лемма 1), то $\mathscr{F}$ однозначно продолжается до изометрии Φ пространства $L^2(G)$ на подпространство в $L^2(\hat{G})$. Для доказательства равенства $\Phi(L^2(G)) = L^2(\hat{G})$ достаточно показать, что $\mathscr{F}(A)$ плотно в $L^2(\hat{G})$. Пусть h — элемент из $L^2(\hat{G})$, ортогональный к $\mathscr{F}(A)$. Если f, $g \in A$, то $(\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g) = \mathscr{F}(f * g) \in \mathscr{F}(A)$; следовательно, функция $h \cdot (\mathscr{F}f)$ ортогональна к $\mathscr{F}g$. Поэтому $h \cdot (\mathscr{F}f)$ ортогональна к $\mathscr{F}(A)$ для любой функции $f \in A$. Но $h \cdot (\mathscr{F}f) \in L^1(\hat{G})$ и $\mathscr{F}(A)$ плотно в $\mathscr{C}^0(\hat{G})$; стало быть, функция $h \cdot (\mathscr{F}f)$ локально нулевая относительно $d\hat{x}$. Поскольку множества Ω_f образуют открытое покрытие пространства $\hat{G}$, отсюда следует, что $h = 0$, чем и доказывается наше утверждение.

Пусть $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. В силу леммы 1, существует фильтр $\mathfrak{B}$ на A, сходящийся к f одновременно в $L^1(G)$ и $L^2(G)$. Имеем

$$\Phi(f) = \lim_{\mathfrak{B},\, g} \Phi(g) = \lim_{\mathfrak{B},\, g} \mathscr{F}g \text{ в } L^2(\hat{G})$$
$$\text{и } \mathscr{F}f = \lim_{\mathfrak{B},\, g} \mathscr{F}g \text{ в } \mathscr{C}^0(\hat{G});$$

следовательно, $\mathscr{F}g = \Phi f$, чем и завершается доказательство теоремы.

Мы будем обозначать изометрию пространства $L^2(G)$ на $L^2(\hat{G})$, указанную в теореме 1, по-прежнему через $\mathscr{F}$ и сохраним за этой изометрией название *преобразования Фурье*. Аналогичным образом, продолжение изометрии $\overline{\mathscr{F}}$ на $L^2(G)$ будет по-прежнему обозначаться $\overline{\mathscr{F}}$ и называться копреобразованием Фурье.

4. Формула обращения Фурье (предварительный случай)

Поскольку $\mathcal{F}$ — изометрия из $L^2(G)$ на $L^2(\hat{G})$, получаем

$$(f \mid g) = (\mathcal{F}f \mid \mathcal{F}g)$$

для любых элементов f, $g \in L^2(G)$. Иначе говоря,

$$(f * \tilde{g})(e) = \int \mathcal{F}f(\hat{x})\,\overline{\mathcal{F}g(\hat{x})}\,d\hat{x}. \tag{20}$$

Выбирая, в частности, f, $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$, получим

$$\mathcal{F}f \cdot \overline{\mathcal{F}g} = \mathcal{F}(f * \tilde{g}) \in L^1(\hat{G}).$$

Предложение 4. *Если $f \in A$, то $\mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})$ и для всех $x \in G$*

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \langle \hat{x}, x\rangle (\mathcal{F}f)(\hat{x})\,d\hat{x} \tag{21}$$

(«формула обращения Фурье»).

Действительно, формула (20) немедленно приводит к формуле (21) при $x = e$; чтобы получить общий случай, достаточно функцию f заменить функцией $\varepsilon_{x^{-1}} * f$.

Если мы рассмотрим теперь вторую двойственную группу $\hat{\hat{G}}$ к группе G и каноническое отображение η из G в $\hat{\hat{G}}$, то сможем записать формулу (21) в виде

$$f = (\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f) \circ \eta \quad \text{для всех} \quad f \in A. \tag{22}$$

Замечание. Пусть $F \in L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$. Полагая $f = \overline{\mathcal{F}}F \circ \eta$, получим функцию, непрерывную и ограниченную на G. Для всех $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$ имеет место равенство

$$\int_G g(x) f(x)\,dx = \int_G g(x)\,dx \int_{\hat{G}} \langle \hat{x}, x\rangle F(\hat{x})\,d\hat{x} = \tag{23}$$

$$= \int_{\hat{G}} \overline{\mathcal{F}}g(\hat{x})\,F(\hat{x})\,d\hat{x},$$

получающееся в результате применения теоремы Лебега — Фубини к функции $g(x)F(\hat{x})\langle \hat{x}, x\rangle$, интегрируемой на $G \times \hat{G}$. Далее, имеет место неравенство

$$\left| \int g(x) f(x)\,dx \right| \leqslant \| \overline{\mathcal{F}}g \|_2 \cdot \| F \|_2 = \| g \|_2 \cdot \| F \|_2,$$

из которого следует, что $f \in L^2(G)$. С другой стороны, применяя теорему 1, имеем

$$\int g(x) f(x)\,dx = \int \overline{\mathcal{F}\tilde{g}(\hat{x})}\,\mathcal{F}f(\hat{x})\,d\hat{x} = \int \overline{\mathcal{F}}g(\hat{x})\,\mathcal{F}f(\hat{x})\,d\hat{x}.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (23), мы видим, что $F = \mathcal{F}f$ в $L^2(\hat{G})$ и что $f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f \circ \eta$.

Обратно, если $f \in L^2(G)$ и $\mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})$, то можно применить предыдущее к функции $F = \mathcal{F}f$ и заключить, что f почти всюду совпадает с *непрерывной* функцией $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f) \circ \eta$. Иначе говоря, *формула* (22) *остается справедливой и для тех* $f \in L^2(G)$, *для которых* $\mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})$.

Предложение 5. *Банахова алгебра* $L^1(G)$ *регулярна.*

Достаточно показать, что если P — замкнутая часть $\hat{G}$ и χ — какая-нибудь точка из $\hat{G}$, не принадлежащая P, то существует функция $f \in L^1(G)$, такая, что функция $\mathcal{F}f$ равна нулю на P и не равна нулю в точке χ. Поскольку, в силу (11), $\mathcal{F}(\chi f) = \varepsilon_\chi * \mathcal{F}f$, можно без ограничения общности считать, что $\chi = e$, где e — нейтральный элемент в $\hat{G}$. В таком случае существует симметричная компактная окрестность U точки e, такая, что $U^2 \cap P = \varnothing$. Пусть F_1 и F_2 — две неотрицательные непрерывные функции на $\hat{G}$, равные нулю вне U и положительные в точке e. Функция $F_3 = F_1 * F_2$ равна нулю на множестве P, а в точке e положительна; поэтому достаточно показать, что $F_3 \in \mathcal{F}L^1(G)$. Но так как $F_i \in L^1(\hat{G}) \cap \cap L^2(\hat{G})$, $i = 1, 2, 3$, то можно применить приведенное выше замечание. Полагая $f_i = \overline{\mathcal{F}}F_i \circ \eta$, найдем, что $f_i \in L^2(G)$, $F_i = \mathcal{F}f_i$. Кроме того,

$$f_3 = \overline{\mathcal{F}}(F_1 * F_2) \circ \eta = (\overline{\mathcal{F}}F_1 \cdot \overline{\mathcal{F}}F_2) \circ \eta = \\ = (\overline{\mathcal{F}}F_1 \circ \eta) \cdot (\overline{\mathcal{F}}F_2 \circ \eta) = f_1 f_2,$$

откуда $f_3 \in L^1(G)$ и $F_3 = \mathcal{F}f_3 \in \mathcal{F}L^1(G)$.

5. Теорема двойственности

Теорема 2 (Понтрягин). *Пусть* $d\hat{x}$ — *мера Хаара на* $\hat{G}$, *ассоциированная с* $d\hat{x}$. *Каноническое отображение* η *из* G *в* $\hat{\hat{G}}$ *является изоморфизмом топологических групп, переводящим* dx *в* $d\hat{\hat{x}}$. *Если с помощью этого изоморфизма отождествить* G *и* $\hat{\hat{G}}$, *то копреобразование Фурье из* $L^2(\hat{G})$ *на* $L^2(G)$ *и преобразование Фурье из* $L^2(G)$ *на* $L^2(\hat{G})$ *окажутся взаимно обратными.*

Покажем сначала, что отображение η инъективно и является гомеоморфизмом G на $\eta(G)$. Для этого достаточно показать, что для каждой окрестности U элемента e в G

существует окрестность W элемента e в $\hat{\hat{G}}$, такая, что $\eta^{-1}(W) \subset U$. Пусть V — симметричная компактная окрестность элемента e в G, такая, что $V^2 \subset U$, и пусть f — ненулевая функция из $\mathscr{K}_+(G)$ с носителем, содержащимся в V. Положим $g = \tilde{f} * f$. Тогда $g \in A$, $\operatorname{supp} g \subset U$ и $g(e) > 0$. Так как топология на $\hat{\hat{G}}$ есть топология простой сходимости на $L^1(\hat{G})$ (предложение 1), то существует окрестность W элемента e в $\hat{\hat{G}}$, такая, что

$$\hat{\hat{x}} \in W \Rightarrow |\langle \mathscr{F}g, \hat{\hat{x}}\rangle - \langle \mathscr{F}g, e\rangle| < \tfrac{1}{2} g(e)$$

(напомним, что $\mathscr{F}g \in L^1(\hat{G})$ (предложение 4)), т. е. такая, что

$$\hat{\hat{x}} \in W \Rightarrow |(\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}g)(\hat{\hat{x}}) - (\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}g)(e)| < \tfrac{1}{2} g(e).$$

Если $x \in \eta^{-1}(W)$, то, в силу (22),

$$|g(x) - g(e)| < \tfrac{1}{2} g(e),$$

откуда $g(x) \neq 0$ и $x \in U$, так как $\operatorname{supp} g \subset U$.

Далее, $\eta(G)$ — локально компактная подгруппа в $\hat{\hat{G}}$, а следовательно, замкнутая в $\hat{\hat{G}}$ (*Общ. топ.*, гл. III, 3-е изд., § 3, след. 2 предл. 4). Если бы существовал элемент $\chi \in \hat{\hat{G}}$, такой, что $\chi \notin \eta(G)$, то существовала бы (предложение 5) ненулевая функция $f \in L^1(\hat{G})$, такая, что $\int f(\hat{x})\overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\, d\hat{x} = 0$ для всех $x \in G$. Тогда, в силу теоремы Лебега — Фубини, для любой функции $u \in L^1(G)$ выполнялось бы равенство

$$\int f(\hat{x})(\mathscr{F}u)(\hat{x})\, d\hat{x} = \int u(x)\, dx \int f(\hat{x})\overline{\langle \hat{x}, x\rangle}\, d\hat{x} = 0,$$

откуда следовало бы, что $f(\hat{x})\, d\hat{x} = 0$, что абсурдно. Стало быть, $\eta(G) = \hat{\hat{G}}$. Формула (22) доказывает, что 1) $\overline{\mathscr{F}}_{\hat{G}}$ — изометрия из $L^2(\hat{G}, d\hat{x})$ на $L^2(\hat{\hat{G}}, \eta(dx))$, следовательно, $d\hat{\hat{x}} = \eta(dx)$; 2) если отождествить G и $\hat{\hat{G}}$ с помощью канонического отображения η, то $\overline{\mathscr{F}} \circ \mathscr{F}$ окажется тождественным отображением пространства $L^2(G)$. Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем отождествлять G и $\hat{\hat{G}}$.

Пусть G, G' — локально компактные коммутативные группы и φ — отображение из $G \times G'$ в $\mathbf{U}$. Для каждого

элемента $x \in G$ (соответственно $x' \in G'$) пусть α_x (соответственно $\beta_{x'}$) — функция $x' \mapsto \varphi(x, x')$ (соответственно $x \mapsto \varphi(x, x')$) на G' (соответственно G). Предположим, что отображение $x \mapsto \alpha_x$ является изоморфизмом топологической группы G на топологическую группу $\hat{G}'$. Тогда, в силу теоремы 2, отображение $x' \mapsto \beta_{x'}$ является изоморфизмом топологической группы G' на топологическую группу $\hat{G}$. В таком случае топологические группы G и G' называются *двойственными относительно* φ, и мы отождествляем каждую из групп G, G' с двойственной к другой.

6. Непосредственные следствия теоремы двойственности

Теорема Понтрягина показывает, что топологические группы G и $\hat{G}$ играют симметричные роли и что относительно пространств L^2 преобразование Фурье и копреобразование Фурье взаимно обратны. Кроме того, имеется естественное соответствие между преобразованиями Фурье на G и $\hat{G}$.

Предложение 6. *Пусть* $\alpha \in \mathcal{M}^1(G)$ *и* $\beta \in \mathcal{M}^1(\hat{G})$. *Тогда имеют место равенства*:

$$\int_G \mathcal{F}\beta(x)\, d\alpha(x) = \int_{\hat{G}} \mathcal{F}\alpha(\hat{x})\, d\beta(\hat{x}), \tag{24}$$

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\beta \cdot \alpha) = \beta * \mathcal{F}\alpha. \tag{25}$$

Докажем равенство (24). Имеем

$$\int_G \mathcal{F}\beta(x)\, d\alpha(x) = \int_G d\alpha(x) \int_{\hat{G}} \overline{\langle \hat{x}, x \rangle}\, d\beta(\hat{x}).$$

Из этого равенства немедленно вытекает (24), если воспользоваться тем, что функция $\overline{\langle \hat{x}, x \rangle}$ интегрируема на $G \times \hat{G}$ по мере $\alpha \otimes \beta$, и применить теорему Фубини.

Докажем равенство (25). Пусть $\hat{x} \in \hat{G}$. Имеем

$$(\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\beta \cdot \alpha))(\hat{x}) = \int_G \overline{\langle \hat{x}, x \rangle}\, \overline{\mathcal{F}}\beta(x)\, d\alpha(x) =$$

$$= \int_G \overline{\langle \hat{x}, x \rangle}\, d\alpha(x) \int_{\hat{G}} \langle \hat{y}, x \rangle\, d\beta(\hat{y}).$$

В этом случае функция $\langle \overline{\hat{x}\hat{y}^{-1}, x}\rangle$ также интегрируема на $G \times \hat{G}$ по мере $\alpha \otimes \beta$, и теорема Лебега — Фубини дает

$$(\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}\beta \cdot \alpha))(\hat{x}) = \int_{\hat{G}} d\beta(\hat{y}) \int_{G} \overline{\langle \hat{x}\hat{y}^{-1}, x\rangle}\, d\alpha(x) =$$

$$= \int_{\hat{G}} \mathcal{F}\alpha(\hat{x}\hat{y}^{-1})\, d\beta(\hat{y}) = (\beta * \mathcal{F}\alpha)(\hat{x}).$$

Следствие. *Отображение $\mathcal{F}$ инъективно на $\mathcal{M}^1(G)$.*

Действительно, если $\mathcal{F}\alpha = 0$, то для любой функции $f \in L^1(\hat{G})$ выполняется равенство $\alpha(\mathcal{F}f) = 0$. Остается заметить, что $\mathcal{F}(L^1(\hat{G}))$ плотно в $\mathcal{C}^0(G)$.

Существует много других функциональных пространств на G и $\hat{G}$ (помимо пространств L^2), для которых $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ — взаимно обратные изоморфизмы. Например, имеет место

Теорема 3. *Пусть $B(G)$ — множество функций $f \in L^1(G)$, таких, что $\mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})$. Тогда $\mathcal{F} \mid B(G)$ — биекция из $B(G)$ на $B(\hat{G})$ и обратная к ней биекция есть $\overline{\mathcal{F}} \mid B(\hat{G})$.*

Пусть $f \in B(G)$. Тогда $\mathcal{F}f \in L^1(\hat{G}) \cap \mathcal{C}^0(\hat{G}) \subset L_1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$. Положим $f' = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f \in L^2(G)$. Для каждой функции $g \in \mathcal{K}(\hat{G})$ имеем

$$\langle f', \mathcal{F}g\rangle = (\mathcal{F}g \mid \overline{\mathcal{F}}f') = (g \mid \overline{\mathcal{F}}\overline{\mathcal{F}}f') = \langle \mathcal{F}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{F}g\rangle.$$

Отсюда следует, что $f' = f \in L^1(G)$ и $\mathcal{F}f \in B(\hat{G})$. В то же время, как легко видеть, $(\overline{\mathcal{F}} \mid B(\hat{G})) \circ (\mathcal{F} \mid B(G))$ — тождественное отображение множества $B(G)$. Меняя ролями G и $\hat{G}$, завершаем доказательство теоремы.

Замечание 1. Справедливо соотношение

$$(f \in L^1(G) \text{ и } \mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})) \Leftrightarrow f \in L^1(G) \cap \mathcal{F}(L^1(\hat{G})).$$

Действительно, из теоремы 3 следует, что

$$(f \in L^1(G) \text{ и } \mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})) \Rightarrow f \in L^1(G) \cap \mathcal{F}(L^1(\hat{G})).$$

Обратно, если $f \in L^1(G)$ и $f = \mathcal{F}g$, где $g \in L^1(\hat{G})$, то $g \in B(\hat{G})$ и, значит, $f \in B(G)$ в силу теоремы 3.

Замечание 2. Множество $B(G)$ является алгеброй и относительно умножения, и относительно операции свертки. В самом деле, если $f, g \in B(G)$, то $f * g \in L^1(G)$ и $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f) \cdot (\mathcal{F}g) \in L^1(\hat{G})$, поскольку, например, $\mathcal{F}f \in L^1(\hat{G})$ и $\mathcal{F}g \in \mathcal{C}^0(\hat{G})$. Стало быть, $f * g \in B(G)$. С другой стороны,

$fg \in L^1(G)$, так как $f \in L^1(G)$, а $g \in \mathscr{C}^0(G)$; кроме того, $f = \mathscr{F}f'$ и $g = \mathscr{F}g'$, где $f', g' \in B(\hat{G})$; следовательно, $fg = \mathscr{F}(f' * g')$ и, значит, $fg \in B(G)$.

Отметим также, что $\mathscr{F}$ переводит свертку в произведение (и обратно) в $B(G)$ и $B(\hat{G})$.

Впрочем, формула $\mathscr{F}(fg) = (\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)$ справедлива и в других случаях, а не только когда $f, g \in B(G)$. Например, имеет место

Предложение 7. *Если* $f, g \in L^2(G)$, *то* $\mathscr{F}(fg) = (\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)$.

Это равенство справедливо, если $f, g \in B(G)$ (замечание 2) и, в частности, если $f, g \in A(G)$. Поскольку $A(G)$ плотно в $L^2(G)$ (лемма 1 (iii)), достаточно показать, что левая и правая части предполагаемого равенства суть непрерывные функции от $(f, g) \in L^2(G) \times L^2(G)$ со значениями в $\mathscr{C}^0(\hat{G})$. Но отображение $(f, g) \mapsto \mathscr{F}(fg)$ есть суперпозиция отображения $(f, g) \mapsto fg$ из $L^2(G) \times L^2(G)$ в $L^1(G)$ с отображением $h \mapsto \mathscr{F}h$ из $L^1(G)$ в $\mathscr{C}^0(\hat{G})$; отображение $(f, g) \mapsto (\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)$ является суперпозицией отображения $(f, g) \mapsto (\mathscr{F}f, \mathscr{F}g)$ из $L^2(G) \times L^2(G)$ в $L^2(\hat{G}) \times L^2(\hat{G})$ с отображением $(h, h') \mapsto h * h'$ из $L^2(\hat{G}) \times L^2(\hat{G})$ в $\mathscr{C}^0(\hat{G})$; остается принять во внимание то обстоятельство, что все эти отображения непрерывны.

7. *Функториальные свойства двойственности*

Пусть G, H — локально компактные коммутативные группы и $\varphi\colon G \to H$ — морфизм топологических групп. Если $\hat{x} \in \hat{H}$, то $\hat{x} \circ \varphi$ является характером группы G, который обозначается через $\hat{\varphi}(\hat{x})$. Это обозначение соответствует формуле

$$\langle \hat{x}, \varphi(y) \rangle = \langle \hat{\varphi}(\hat{x}), y \rangle,$$

справедливой для любых $\hat{x} \in \hat{H}$ и $y \in G$. Отсюда видно, что $\hat{\varphi}$ представляет собой морфизм топологической группы $\hat{H}$ в топологическую группу $\hat{G}$; морфизм $\hat{\varphi}$ называют *двойственным* к морфизму φ.

Если $\varphi'\colon H \to K$ — морфизм топологических групп, то, как следует из приведенной выше формулы, $(\varphi' \circ \varphi)\hat{} = \hat{\varphi} \circ \hat{\varphi}'$. Если φ — тождественное отображение группы G, то $\hat{\varphi}$ — тождественное отображение группы $\hat{G}$.

Эта формула показывает также, что $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$ (достаточно канонически отождествить G с $\hat{\hat{G}}$, H с $\hat{\hat{H}}$).

Теорема 4. *Пусть G' — замкнутая подгруппа в G, G'' — факторгруппа G/G', i — каноническая инъекция G' в G, p — каноническая сюръекция G на G'':*

$$G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G'',$$

$$\hat{G}' \xleftarrow{\hat{i}} \hat{G} \xleftarrow{\hat{p}} \hat{G}''.$$

Тогда отображение $\hat{p}$ является изоморфизмом $\hat{G}''$ на $G'^{\perp}$, а отображение $\hat{i}$ — точным морфизмом $\hat{G}$ на $\hat{G}'$ с ядром $G'^{\perp}$.

1) Ясно, что $\hat{p}(\hat{G}'')$ есть множество унитарных характеров группы G, равных нулю на G', т. е. множество $G'^{\perp}$. Если элемент $\hat{x}'' \in \hat{G}''$ таков, что $\hat{p}(\hat{x}'') = e$, то для всех $x \in G$ имеет место равенство $1 = \langle x, \hat{p}(\hat{x}'')\rangle = \langle p(x), \hat{x}''\rangle$, из которого следует, что $\hat{x}'' = e$. Поэтому отображение $\hat{p}$ инъективно. С другой стороны, пусть U — некоторая окрестность элемента e в $\hat{G}''$. Существуют компактная часть K'' в G'' и число $\varepsilon > 0$, такие, что

$$(\hat{x}'' \in \hat{G}'' \text{ и } |\langle \hat{x}'', x''\rangle - 1| \leqslant \varepsilon \text{ для всех } x'' \in K'') \Rightarrow \hat{x}'' \in U.$$

В силу *Общ. топ.*, гл. I, 4-е изд., § 10, n° 4, предл. 10, существует компактная часть K в G, такая, что $p(K) = K''$. Тогда

$$(\hat{x}'' \in \hat{G}'' \text{ и } |\langle \hat{p}(\hat{x}''), x\rangle - 1| \leqslant \varepsilon \text{ для всех } x \in K) \Rightarrow \hat{x}'' \in U.$$

Иначе говоря, существует окрестность V элемента e в $\hat{G}$, такая, что

$$(\hat{x}'' \in \hat{G}'' \text{ и } \hat{p}(\hat{x}'') \in V) \Rightarrow \hat{x}'' \in U.$$

Таким образом, $\hat{p}$ является изоморфизмом $\hat{G}''$ на $G'^{\perp}$.

2) Ясно, что ядро отображения $\hat{i}$ совпадает с $G'^{\perp}$. Пусть L — двойственная группа к группе $\hat{G}/\hat{i}^{-1}(e)$, так что $\hat{G}/\hat{i}^{-1}(e) = \hat{L}$. Существует морфизм $\psi\colon L \to G$ топологических групп, такой, что $\hat{\psi}$ — каноническая сюръекция из $\hat{G}$ на $\hat{L}$:

$$G' \xrightarrow{\eta} L \xrightarrow{\psi} G,$$

$$\hat{G}' \xleftarrow{\hat{\eta}} \hat{L} \xleftarrow{\hat{\psi}} \hat{G}.$$

С другой стороны, отображение $\hat{i}$ может быть представлено в виде $\hat{\eta} \circ \hat{\psi}$, где $\eta\colon G' \to L$ — некоторый морфизм топологических групп. Так как $\psi \circ \eta = i$, то $\psi(L) \supset G'$. Из равенства

$$(\hat{\psi} \circ \hat{p})(\hat{G}'') = \{e\}$$

следует, что $(p \circ \psi)(L) = \{e\}$ и, значит, $\psi(L) \subset G'$. Таким образом, $\psi(L) = G'$. Согласно первой части доказательства, ψ — изоморфизм L на G'. Стало быть, η — изоморфизм G' на L, $\hat{\eta}$ — изоморфизм $\hat{L}$ на $\hat{G}'$, а $\hat{i}$ — точный морфизм $\hat{G}$ на $\hat{G}'$ с ядром $G'^{\perp}$.

Следствие 1. *Пусть G' — некоторая подгруппа в G. Тогда* $(G'^{\perp})^{\perp} = \overline{G'}$.

Предположим сначала, что подгруппа G' замкнута, и используем обозначения теоремы 4. Тогда $\hat{i}$ есть точный морфизм $\hat{G}$ на $\hat{G}'$ с ядром $G'^{\perp}$ и, стало быть, $\hat{\hat{i}}$ — изоморфизм $\hat{\hat{G}}'$ на $(G'^{\perp})^{\perp}$. Если отождествить G' с $\hat{\hat{G}}'$, G с $\hat{\hat{G}}$ и i с $\hat{\hat{i}}$, то морфизм i окажется изоморфизмом G' на $(G'^{\perp})^{\perp}$, откуда $G' = (G'^{\perp})^{\perp}$. В общем случае имеем

$$\overline{G'} \subset (G'^{\perp})^{\perp} = (\overline{G'}^{\perp})^{\perp} = \overline{G'}.$$

Следствие 2. *Пусть (H_i) — семейство замкнутых подгрупп в G. Тогда аннулятор замкнутой подгруппы, порожденной подгруппами H_i, совпадает с $\bigcap_i H_i^{\perp}$. Аннулятор пересечения $\bigcap_i H_i$ является замкнутой подгруппой, порожденной подгруппами $H_i^{\perp}$.*

Первое утверждение очевидно. Второе получается (с учетом следствия 1) заменой G на $\hat{G}$.

Следствие 3. *Пусть $\varphi\colon G \to H$ — морфизм топологических групп. Для того чтобы φ был точным сюръективным морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{\varphi}$ был точным инъективным морфизмом.*

Если φ — сюръективный точный морфизм, то $\hat{\varphi}$ — инъективный точный морфизм (теорема 4). Если же $\hat{\varphi}$ — инъективный точный морфизм, то φ является изоморфизмом G на некоторую локально компактную и, стало быть, замкнутую подгруппу в H; следовательно, φ — сюръективный точный морфизм (теорема 4).

Следствие 4. *Пусть $\varphi\colon G \to H$ — морфизм топологических групп. Для того чтобы φ был точным морфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{\varphi}$ был точным морфизмом.*

Это немедленно вытекает из следствия 3 и канонического разложения точного морфизма.

Следствие 5. *Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — локально компактные коммутативные группы и λ_i — каноническая инъекция G_i*

в группу $G = \prod_{1 \leqslant l \leqslant n} G_l$. *Тогда отображение* $(\hat{\lambda}_l)_{1 \leqslant l \leqslant n}$ *из* $\hat{G}$ *в* $\prod_{1 \leqslant l \leqslant n} \hat{G}_l$ *является изоморфизмом.*

Для $n = 2$ это следует из теоремы 4. Чтобы доказать общее утверждение, достаточно провести индукцию по n.

Следствие 6. *Пусть* $\varphi\colon G \to H$ *— морфизм топологических групп. Тогда подгруппа* $\overline{\operatorname{Im}\varphi}$ *в* H *и подгруппа* $\operatorname{Ker}\hat{\varphi}$ *в* $\hat{H}$ *взаимно ортогональны. В частности, для того чтобы морфизм* $\hat{\varphi}$ *был инъективным, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{Im}\varphi$ *был плотным в* H.

Пусть $\hat{y} \in \hat{H}$. Для того чтобы $\hat{y} \in \operatorname{Ker}\hat{\varphi}$, необходимо и достаточно, чтобы $\langle \hat{\varphi}(\hat{y}), x\rangle = 1$ для всех $x \in G$, т. е. чтобы $\langle \hat{y}, \varphi(x)\rangle = 1$ для всех $x \in G$, иначе говоря, чтобы $\hat{y} \in (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp} = (\overline{\operatorname{Im}\varphi})^{\perp}$. Поэтому $\operatorname{Ker}\hat{\varphi} = (\overline{\operatorname{Im}\varphi})^{\perp}$, а в силу следствия 1, $\overline{\operatorname{Im}\varphi} = (\operatorname{Ker}\hat{\varphi})^{\perp}$.

Следствие 7. *Пусть* $k \in \mathbf{Z}$. *Пусть* $G^{(k)}$ *и* $G_{(k)}$ *— образ и ядро морфизма* $x \mapsto x^k$ *из* G *в* G. *Тогда* $G_{(k)}$ *и замыкание подгруппы* $\hat{G}^{(k)}$ *взаимно ортогональны.*

Действительно, морфизмы $x \mapsto x^k$ из G в G и $\hat{x} \mapsto \hat{x}^k$ из $\hat{G}$ в $\hat{G}$ двойственны друг другу.

Коммутативную группу C называют *делимой*[1]), если для каждого элемента $x \in C$ и каждого числа $k \in \mathbf{Z}$ существует элемент $y \in C$, такой, что $y^k = x$.

Следствие 8. (i) *Если группа* G *делима, то* $\hat{G}$ *— группа без кручения (т. е. не имеет элементов конечного порядка).*

(ii) *Если* $\hat{G}$ *— группа без кручения и* $k \in \mathbf{Z}$, *то множество элементов* x^k *(где* x *пробегает* G*) плотно в* G.

(iii) *Пусть* G *дискретна или компактна. Для того чтобы* G *была делимой, необходимо и достаточно, чтобы* $\hat{G}$ *не имела кручения.*

Утверждения (i) и (ii) вытекают из следствия 7. Если группа G дискретна или компактна, то образ морфизма $x \mapsto x^k$ из G в G замкнут и (iii) вытекает из (i) и (ii).

8. Формула Пуассона

Предложение 8. *Пусть* H *— замкнутая подгруппа в* G, α *— мера Хаара на* H, β *— мера Хаара на* G *и* $\gamma = \beta/\alpha$ *— соот-*

[1]) Употребляется также термин *полная*. — *Прим. ред.*

ветствующая мера Хаара на G/H. Отождествим $(G/H)^\wedge$ с $H^\perp$ и обозначим через $\hat{\gamma}$ меру Хаара на $H^\perp$, ассоциированную с γ. Пусть $f \in L^1(G)$. Предположим, что сужение на $H^\perp$ непрерывной функции $\mathscr{F}f$ интегрируемо (по мере $\hat{\gamma}$). Тогда для почти всех $x \in G$ функция $h \mapsto f(xh)$ на H является α-интегрируемой и справедливо равенство

$$\int_H f(xh)\, d\alpha(h) = \int_{H^\perp} \langle k, x\rangle (\mathscr{F}f)(k)\, d\hat{\gamma}(k).$$

Известно (*Интегр.*, гл. VII, § 2, предл. 5), что для почти всех $x \in G$ функция $h \mapsto f(xh)$ является α-интегрируемой на H и что функция $\dot{x} \mapsto F(\dot{x}) = \int_H f(xh)\, d\alpha(h)$, определенная почти всюду на G/H, γ-интегрируема (через $\dot{x}$ обозначается канонический образ элемента x в G/H). Преобразование Фурье функции F, рассматриваемое как функция на $H^\perp$, задается равенством

$$(\mathscr{F}F)(k) = \int_{G/H} \overline{\langle k, \dot{x}\rangle}\, d\gamma(\dot{x}) \int_H f(xh)\, d\alpha(h) = \tag{26}$$

$$= \int_G \overline{\langle k, x\rangle} f(x)\, d\beta(x) = (\mathscr{F}f)(k).$$

В силу нашего предположения относительно функции f, получаем, следовательно, $\mathscr{F}F \in L^1((G/H)^\wedge)$. Стало быть, функция F почти всюду совпадает с функцией $\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}F)$ (теорема 3), т. е. почти всюду на G/H имеет место равенство

$$F(\dot{x}) = \int_{H^\perp} \langle k, x\rangle (\mathscr{F}F)(k)\, d\hat{\gamma}(k).$$

Принимая во внимание (26), получаем наше утверждение.

Следствие. *Сохраним обозначения H, α, β, γ, $\hat{\gamma}$ предложения 8. Пусть $f \in L^1(G)$. Предположим, что*

1) *сужение функции $\mathscr{F}f$ на $H^\perp$ интегрируемо;*
2) *для всех $x \in G$ функция $h \mapsto f(xh)$ на H интегрируема;*
3) $\int_H f(xh)\, d\alpha(h)$ *— непрерывная функция от x.*

Тогда имеет место равенство (формула Пуассона)

$$\int_H f(h)\, d\alpha(h) = \int_{H^\perp} (\mathscr{F}f)(k)\, d\hat{\gamma}(k). \tag{27}$$

Действительно, используя введенные выше обозначения, мы видим, что функции F и $\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}F)$ совпадают почти всюду

и непрерывны; стало быть, они совпадают всюду и, в частности, в точке e, откуда и получается (27).

Замечание. Мы увидим в дальнейшем, когда распространим преобразование Фурье на распределения, что формула (27) выражает то обстоятельство, что преобразование Фурье меры Хаара α в H совпадает с мерой Хаара $\hat{\gamma}$ в $H^\perp$.

Предложение 9. *Сохраним обозначения* α, β, γ, H *предложения* 8. *Пусть* $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ *и* $\hat{\gamma}$ — *ассоциированные меры Хаара на* $\hat{H} = \hat{G}/H^\perp$, $\hat{G}$ *и* $(G/H)^\wedge = H^\perp$. *Тогда* $\hat{\alpha} = \hat{\beta}/\hat{\gamma}$.

Пусть $f \in \mathscr{K}(G)$. Для $x \in G$ и $y \in \hat{G}$ положим

$$\varphi(x, y) = \int_H f(xh)\langle y, h\rangle\, d\alpha(h).$$

Следующие факты очевидны: a) функция $\varphi(x, y)$ при фиксированном x зависит только от класса $\dot{y}$ элемента y в $\hat{G}/H^\perp$; b) функция $\langle y, x\rangle\varphi(x, y)$ при фиксированном y зависит только от класса $\dot{x}$ элемента x в G/H; c) функция φ непрерывна на $G \times \hat{G}$.

Функция $\dot{y} \longmapsto \varphi(x, y)$ есть копреобразование Фурье функции $h \longmapsto f(xh)$ на H, следовательно,

$$\int_{\hat{G}/H^\perp} |\varphi(x, y)|^2\, d\hat{\alpha}(\dot{y}) = \int_H |f(xh)|^2\, d\alpha(h). \tag{28}$$

Копреобразованием Фурье непрерывной функции $\dot{x} \longmapsto \langle y, x\rangle\varphi(x, y)$ с компактным носителем на G/H является следующая функция на $H^\perp$:

$$\begin{aligned} k \longmapsto & \int_{G/H} \langle k, \dot{x}\rangle\langle y, x\rangle\varphi(x, y)\, d\gamma(\dot{x}) = \\ & = \int_{G/H} d\gamma(\dot{x}) \int_H \langle yk, xh\rangle f(xh)\, d\alpha(h) = \\ & = \int_{G/H} d\gamma(\dot{x}) \int_H \langle yk, x\rangle f(x)\, d\alpha(h) = \\ & = \int_G \langle yk, x\rangle f(x)\, d\beta(x) = \overline{\mathscr{F}}f(yk). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{G/H} |\varphi(x, y)|^2\, d\gamma(\dot{x}) = \int_{H^\perp} |\overline{\mathscr{F}}f(yk)|^2\, d\hat{\gamma}(k). \tag{29}$$

Из (28) и (29) выводим цепочку равенств

$$\int_{\hat{G}} |(\mathcal{F}f)(y)|^2 \, d\hat{\beta}(y) = \int_G |f(x)|^2 \, d\beta(x) =$$

$$= \int_{G/H} d\gamma(\dot{x}) \int_H |f(xh)|^2 \, d\alpha(h) =$$

$$= \int_{G/H} d\gamma(\dot{x}) \int_{\hat{G}/H^\perp} |\varphi(x, y)|^2 \, d\hat{\alpha}(\dot{y}) =$$

$$= \int_{\hat{G}/H^\perp} d\hat{\alpha}(\dot{y}) \int_{G/H} |\varphi(x, y)|^2 \, d\gamma(\dot{x}) =$$

$$= \int_{\hat{G}/H^\perp} d\hat{\alpha}(\dot{y}) \int_{H^\perp} |(\overline{\mathcal{F}f})(yk)|^2 \, d\hat{\gamma}(k).$$

Выбирая $f \neq 0$, получаем отсюда, что $\hat{\alpha} = \hat{\beta}/\hat{\gamma}$.

9. *Примеры двойственности*

Предложение 10. *Если группа G конечна, то $\hat{G}$ изоморфна (вообще говоря, не канонически) группе G.*

Пусть $x \in G$, $\hat{x} \in \hat{G}$ и $n = \operatorname{Card} G$. Имеем $\langle \hat{x}, x \rangle^n = 1$. Характер группы G является в таком случае гомоморфизмом G в группу корней из 1 в $\mathbf{C}$. Наше утверждение следует тогда из *Алг.*, гл. VII, 2-е изд., § 4, n° 8, предл. 8 и пример.

Предложение 11. *Для того чтобы группа $\hat{G}$ была компактной, необходимо и достаточно, чтобы группа G была дискретной. Нормированные меры Хаара (Интегр., гл. VII, § 1, n° 3) на G и $\hat{G}$ являются тогда ассоциированными.*

Предположим, что группа G компактна. Тогда существует окрестность V элемента e в $\hat{G}$, обладающая следующими свойствами: если $\chi \in V$, то $|\chi(x) - 1| \leqslant 1$ для любого элемента $x \in G$, следовательно, $|\chi(x)^n - 1| \leqslant 1$ для любого $x \in G$ и любого $n \in \mathbf{Z}$; стало быть, $\chi(x) = 1$ для любого $x \in G$ и, значит, $V = \{e\}$. Тем самым доказано, что группа $\hat{G}$ дискретна. Итак, если $\hat{G}$ — компактная группа, то G — дискретная группа.

Предположим, что G — дискретная группа. Снабдим группу G нормированной мерой Хаара α, которая приписывает каждой точке массу, равную 1. Пусть f — характеристическая функция элемента e на G. Тогда $\mathcal{F}f = 1$ на $\hat{G}$ и $\mathcal{F}f$ стремится к нулю на бесконечности, следовательно, $\hat{G}$

компактна. С другой стороны, по отношению к ассоциированной с α мере Хаара $\hat{\alpha}$ функция $\mathcal{F}f$ имеет интеграл, равный 1. Поэтому $\hat{\alpha}(\hat{G}) = 1$ и, значит, $\hat{\alpha}$ — нормированная мера Хаара на $\hat{G}$.

Замечание. Отметим, что для конечной группы G, состоящей из n элементов, понятие нормированной меры Хаара двусмысленно. В этом случае, как указано в предложении 11, если α — мера Хаара на G, которая приписывает каждой точке массу, равную 1, то ассоциированная с ней мера Хаара $\hat{\alpha}$ на $\hat{G}$ приписывает каждой точке массу, равную $1/n$.

Следствие 1. *Пусть H — замкнутая подгруппа в G. Для того чтобы эта подгруппа была компактной, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа $H^\perp$ была открытой в $\hat{G}$.*

Действительно, то, что подгруппа $H^\perp$ открыта, равносильно тому, что $G/H^\perp$ дискретна, а $G/H^\perp$ изоморфна $\hat{H}$.

Следствие 2. *Пусть $(H_\alpha)_{\alpha\in I}$ — убывающее фильтрующееся семейство компактных подгрупп в G. Для того чтобы группа G отождествлялась с проективным пределом подгрупп G/H_α, необходимо и достаточно, чтобы группа $\hat{G}$ представлялась в виде объединения открытых подгрупп $H_\alpha^\perp$ (изоморфных $(G/H_\alpha)^\wedge$).*

То, что группа G отождествляется с проективным пределом подгрупп G/H_α, равносильно тому, что $\bigcap_\alpha H_\alpha = \{e\}$ (*Общ. топ.*, гл. III, 3-е изд., § 7, предл. 2), т. е. тому, что $\bigcup_\alpha H_\alpha^\perp$ плотно в $\hat{G}$ (следствие 2 теоремы 4). Но $\bigcup_\alpha H_\alpha^\perp$ — открытая и, стало быть, замкнутая подгруппа в $\hat{G}$.

Следствие 3. *Группа, двойственная к произведению компактных групп H_α, отождествляется с прямой суммой дискретных групп $\hat{H}_\alpha$.*

Это утверждение представляет собой частный случай следствия 2.

Предложение 12. *Пусть K — локально компактное недискретное тело (не обязательно коммутативное). Выберем в качестве G аддитивную группу K. Пусть χ — фиксированный унитарный характер в G, отличный от 1. Для $x, y \in G$ положим $\varphi(x, y) = \chi(xy)$. Тогда группа G двойственна себе относительно φ.*

Для $x, y \in G$ положим $\chi_y(x) = \chi(xy)$. Непосредственно видно, что $\chi_y \in \hat{G}$ и что отображение θ: $y \mapsto \chi_y$ есть инъективный гомоморфизм из G в $\hat{G}$. Кроме того, отображение θ непрерывно, так как отображение $(x, y) \mapsto \chi_y(x)$ из $G \times G$ в $\mathbf{C}$ непрерывно, и $\theta(G)$ плотно в $\hat{G}$, так как равенство $\chi_y(x) = 1$ для всех $y \in G$ влечет за собой $x = 0$. Пусть $z \mapsto |z|$ — абсолютное значение, определяющее топологию в K (*Комм. алг.*, гл. VI, § 9, n° 1, предл. 1), и пусть элемент $x_0 \in K$ таков, что $\chi(x_0) \neq 1$. Пусть $M > 0$. Если для $|x| \leqslant M$ выполняется неравенство $|\chi_y(x) - 1| \leqslant |\chi(x_0) - 1|$, то $|y^{-1}x_0| > M$, т. е. $|y| < M^{-1}|x_0|$. Отсюда заключаем, что отображение $y \mapsto \chi_y$ является гомеоморфизмом группы G на $\theta(G)$; следовательно, $\theta(G)$ локально компактна и потому замкнута в $\hat{G}$, и, значит, $\theta(G) = \hat{G}$.

Следствие 1. (i) *Группа* $\mathbf{R}$ *двойственна себе относительно отображения* $(x, y) \mapsto \exp(2\pi i x y)$. *Группа* $\hat{\mathbf{R}}$, *таким образом, отождествляется с* $\mathbf{R}$, *а мера Лебега ассоциирована сама с собой.*

(ii) *Группы* $\mathbf{Z}$ *и* $\mathbf{T}$ *являются двойственными друг другу относительно отображения* $(n, \dot{t}) \mapsto \exp(2i\pi n t)$ (*где через* $\dot{t}$ *обозначен канонический образ в* $\mathbf{T}$ *вещественного числа* t).

Группа $\mathbf{R}$ двойственна себе относительно отображения $(x, y) \mapsto \exp(2i\pi x y)$ (предложение 12). Отождествим $\hat{\mathbf{R}}$ с $\mathbf{R}$. Аннулятор подгруппы $\mathbf{Z}$ в $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ совпадает тогда с $\mathbf{Z}$ и (ii) следует из теоремы 4. Пусть α (соответственно γ) — нормированная мера Хаара на $\mathbf{Z}$ (соответственно $\mathbf{T}$). Если через β обозначить меру Лебега на $\mathbf{R}$, то $\gamma = \beta/\alpha$. Мера Хаара $\hat{\alpha}$ (соответственно $\hat{\gamma}$) на $\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}$ (соответственно $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{Z}$), ассоциированная с α (соответственно γ), является нормированной мерой Хаара на $\mathbf{T}$ (соответственно $\mathbf{Z}$) (предложение 11). В силу предложения 9, мера Хаара на $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$, ассоциированная с β, совпадает с β.

Замечание 1. Вернемся, в частности, к определению пространства $\mathrm{X}(L^1(\mathbf{Z}))$, данному в гл. I, § 3, n° 3, пример 4. Если не оговорено противное, мы впредь будем отождествлять $\hat{\mathbf{R}}$ с $\mathbf{R}$ в соответствии со следствием 1 (i).

Следствие 2. *Пусть* f — *комплексная функция, интегрируемая на* $\mathbf{R}$. *Предположим, что для каждого* $x \in \mathbf{R}$ *имеет место неравенство* $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |f(x+n)| < +\infty$ *и что функция* $x \mapsto$

$\longmapsto \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n)$ *непрерывна. Предположим также, что*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |(\mathscr{F}f)(n)| < +\infty.$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} (\mathscr{F}f)(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n).$$

Это равенство представляет собой частный случай следствия предложения 8.

Следствие 3. *Группа* $\mathbf{R}^n$ *двойственна себе относительно отображения* $((x_i), (y_j)) \longmapsto \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)$. *Группа* $(\mathbf{R}^n)\hat{}$, *таким образом, отождествляется с* $\mathbf{R}^n$, *а мера Лебега ассоциирована сама с собой.*

Это утверждение вытекает из следствия 1 (i).

Замечание 2. Если задана некоторая подгруппа H в $\mathbf{R}^n$, то ей соответствует ортогональная подгруппа $H^\perp$ в $(\mathbf{R}^n)\hat{} = \mathbf{R}^n$, которая есть не что иное, как подгруппа, *ассоциированная* с H в смысле определения *Общ. топ.*, гл. VII, § 1, n° 3.

Пусть p — простое число. Для каждого числа $x \in \mathbf{Q}_p$ существует и притом единственное число $\lambda(x) \in \mathbf{Q}$ вида q/p^v, где $0 \leqslant q < p^v$, такое, что $\lambda(x) - x \in \mathbf{Z}_p$ (*Алг.*, гл. VII, § 2, n° 2, теор. 2); положим $q/p^v = \lambda(x)$. Ясно, что $\lambda(x+x') \equiv \lambda(x) + \lambda(x') \pmod{\mathbf{Z}}$ и что функция λ локально постоянна на $\mathbf{Q}_p$. Поэтому функция $x \longmapsto \exp(2\pi i\lambda(x))$ является унитарным характером группы $\mathbf{Q}_p$. Его ядро совпадает с $\mathbf{Z}_p$.

Следствие 4. (i) *Группа* $\mathbf{Q}_p$ *двойственна себе относительно отображения* $(x, y) \longmapsto \exp(2i\pi\lambda(xy))$. *Группа* $\hat{\mathbf{Q}}_p$, *таким образом, отождествляется с* $\mathbf{Q}_p$, *нормированная мера Хаара на* $\mathbf{Q}_p$ (*Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 6, пример) *ассоциирована сама с собой.*

(ii) *Группы* $\mathbf{Z}_p$ *и* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ *двойственны друг другу относительно отображения* $(z, \dot{t}) \longmapsto \exp(2i\pi\lambda(zt))$, *где через* $\dot{t}$ *обозначен канонический образ в* $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ p-*адического числа* t.

Доказательство буквально повторяет доказательство следствия 1.

§ 2. Структура коммутативных локально компактных групп

1. Группы, порожденные компактными частями

Лемма 1. *Пусть H — локально компактная группа и φ — непрерывный морфизм из* $\mathbf{R}$ *(соответственно* $\mathbf{Z}$*) в H. Если φ не является изоморфизмом (топологическим) из* $\mathbf{R}$ *(соответственно* $\mathbf{Z}$*) на некоторую подгруппу в H, то $\varphi(\mathbf{R})$ (соответственно $\varphi(\mathbf{Z})$) — относительно компактное множество.*

Пусть I — образ морфизма φ. Поскольку можно заменить H на $\overline{I}$, мы будем предполагать, что I плотно в H. Предположим, далее, что существуют окрестность V элемента e в H и целое $M>0$, такие, что для каждого $t>M$ из $\mathbf{R}$ (соответственно из $\mathbf{Z}$) $\varphi(t)\notin V$. Тогда φ — инъективный морфизм, сужение φ на $[-M, M]$ является гомеоморфизмом и сужение φ^{-1} на $V\cap I$ непрерывно; следовательно, φ есть топологический изоморфизм из $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{Z}$) на I.

Предположим, что φ не является топологическим изоморфизмом из $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{Z}$) на I. Пусть W — какая-нибудь относительно компактная открытая окрестность элемента e в H и V — симметричная окрестность элемента e, такая, что $V^2\subset W$. Для каждого элемента $x\in H=\overline{I}$ существует число $s\in\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{Z}$), такое, что $x\in\varphi(s)V$. Согласно предыдущему абзацу, существует число $t\in\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{Z}$), такое, что $|t|>s$ и $\varphi(t)\in V$. Имеем $x\in\varphi(t+s)\varphi(t)^{-1}V\subset\varphi(t+s)W$, $t+s>0$. Далее, открытые множества $\varphi(u)W$ для $u>0$ образуют открытое покрытие H. Существуют строго положительные числа $u_1, \ldots, u_n$, такие, что $\overline{W}\subset\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}\varphi(u_i)W$. Пусть T — наибольшее из чисел u_i. Пусть $x\in H$ и $s=\inf\{t\mid t\geqslant 0, \varphi(t)\in\overline{W}x\}$. Тогда $\varphi(s)x^{-1}\in\overline{W}$, и существует такой номер i, что $\varphi(s)x^{-1}\in\varphi(u_i)W$ и, значит, $\varphi(s-u_i)\in\overline{W}x$. Выбор числа s обеспечивает неравенство $s-u_i<0$, откуда следует, что $s\leqslant T$. Таким образом, $H=\varphi([0, T])\overline{W}$ — компакт.

Лемма 2. *Если группа G порождается компактной окрестностью V элемента e, то существует дискретная подгруппа D в G, изоморфная группе $\mathbf{Z}^n$ и такая, что факторгруппа G/D компактна.*

Так как V^2 — компакт, то существуют элементы $x_1, \ldots, x_k\in G$, такие, что $V^2\subset\bigcup_{1\leqslant i\leqslant k}x_iV$. Пусть D_0 — подгруппа,

порожденная этими элементами. Имеем $V^2 \subset D_0V$, откуда по индукции получаем, что $V^n \subset D_0V$ и, кроме того, $G = D_0V$. Пусть тогда J — часть множества $\{1, \ldots, k\}$, такая, что подгруппа D, порожденная элементами x_i $(i \in J)$, топологически изоморфна $\mathbf{Z}^{\mathrm{Card}\, J}$, причем J — максимальная из частей, обладающих таким свойством. Покажем, что G/D компактна. Пусть p — каноническая сюръекция G на G/D. Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, k\} - J$. Если подгруппа H_i в G/D, порожденная элементами $p(x_i)$, топологически изоморфна $\mathbf{Z}$, то подгруппа в G, порожденная D и x_i, дискретна, и отображение $(d, n) \mapsto dx_i^n$ является изоморфизмом $D \times \mathbf{Z}$ на эту подгруппу, что противоречит максимальности J. Из леммы 1, следовательно, вытекает, что $\overline{H}_i$ — компакт. Поэтому $G/D = \left(\coprod_{i \notin J} \overline{H}_i\right) p(V)$ — компакт.

Предложение 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *G порождена компактной окрестностью элемента e;*

(ii) *G представляется в виде прямого произведения групп $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{Z}^q$ при некоторых p и q и некоторой компактной группы;*

(iii) *$\hat{G}$ локально изоморфна группе $\mathbf{R}^n$ при некотором n;*

(iv) *$\hat{G}$ представляется в виде прямого произведения групп $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{T}^q$ при некоторых p и q и некоторой дискретной группы.*

(i)$\Rightarrow$(iii): если группа G обладает свойством (i), то существует подгруппа D в G, изоморфная $\mathbf{Z}^n$ и такая, что G/D — компакт (лемма 2). Тогда $D^\perp$ — дискретная группа, следовательно, $\hat{G}$ локально изоморфна $\hat{G}/D^\perp$, т. е. $\hat{D}$, а значит, $\mathbf{T}^n$ и, стало быть, $\mathbf{R}^n$.

(iii)$\Rightarrow$(iv): если $\hat{G}$ локально изоморфна $\mathbf{R}^n$, то связная компонента единицы $(\hat{G})_0$ в $\hat{G}$ является открытой подгруппой, изоморфной $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^{n-p}$ (*Общ. топ.*, гл. VII, § 2, теор. 1), и, следовательно, делимой группой. Для завершения доказательства предложения 1 нам понадобится

Лемма 3. *Пусть A и B — коммутативные группы, C — подгруппа в B и φ — морфизм из C в A. Если группа A делима, то существует морфизм из B в A, являющийся продолжением морфизма φ.*

(Другими словами, делимые группы инъективны в категории коммутативных групп; см. *Алг.*, гл. VII, 2-е изд., § 2, упр. 3.)

Пусть $\mathfrak{S}$ — множество пар (X, f), где X — подгруппа в B, содержащая C, и f — морфизм из X в A, являющийся продолжением φ. Упорядочим множество $\mathfrak{S}$ с помощью отношения: «$X \subset X'$ и f' есть продолжение f». Непосредственно

проверяется, что $\mathfrak{E}$ индуктивно. Пусть (X, f) — максимальный элемент в $\mathfrak{E}$. Если $X \neq B$, возьмем какой-нибудь элемент x из $B - X$ и образуем подгруппу X', порожденную X и x. Если $x^n \notin X$ при любом $n \neq 0$, то можно продолжить f на X', выбирая в качестве $f(x)$ произвольный элемент из A. В противном случае пусть n — наименьшее целое положительное число, такое, что $x^n \in X$. Поскольку группа A делима, существует элемент $y \in A$, такой, что $y^n = f(x^n)$, и можно продолжить f на X', полагая $f(x) = y$. В каждом из этих двух случаев элемент (X, f) не будет максимальным в $\mathfrak{E}$. Следовательно, $X = B$, и лемма доказана.

Применим лемму 3 к тождественному отображению из $C = (\hat{G})_0$ в $A = (\hat{G})_0$, $B = \hat{G}$. Получается проектор π из $\hat{G}$ на $\hat{G}_0$, который непрерывен, так как непрерывно его сужение на открытую подгруппу $\hat{G}_0$. Следовательно, $\hat{G}$ представляется в виде прямого произведения группы $\hat{G}_0$ и дискретной подгруппы $\pi^{-1}(e)$. Импликации (iv) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидны. Предложение 1 доказано.

Следствие 1. *Предположим, что группа G порождена компактной окрестностью элемента e. Тогда G содержит наибольшую компактную подгруппу K, и G изоморфна* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$.

В силу предложения 1 группа G отождествляется с группой $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$, где K — некоторая компактная группа. Пусть p — каноническая сюръекция G на $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q$. Если K' — какая-нибудь компактная подгруппа в G, то $p(K')$ — компактная подгруппа в $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q$, сводящаяся, следовательно, к нейтральному элементу. Поэтому $K' \subset K$ и, значит, K — наибольшая компактная подгруппа в G.

Замечание 1. В разложении $G = \mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$, указанном в предложении 1 (ii), подгруппа K определяется однозначно как наибольшая компактная подгруппа в G, и подгруппа $\mathbf{R}^p \times K$ также определяется однозначно, поскольку $\mathbf{R}^p$ есть связная компонента единицы в G/K. Принимая во внимание *Общ. топ.*, гл. VII, § 2, предл. 1, мы видим, что и целое число p определяется однозначно. Наконец, поскольку $G/(\mathbf{R}^p \times K)$ изоморфна $\mathbf{Z}^q$, целое число q определяется однозначно. В силу двойственности, в разложении

$$\hat{G} = \mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times D,$$

указанном в предложении 1 (iv), подгруппы $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$, D и целые числа p и q определяются однозначно.

Следствие 2. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) G *и* $\hat{G}$ *порождены компактными окрестностями элемента* e;

(ii) G *локально изоморфна группе* $\mathbf{R}^m$, *а* $\hat{G}$ *— группе* $\mathbf{R}^n$;

(iii) G *изоморфна произведению* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times \Phi$, *где* Φ *— конечная группа*;

(iv) G *изоморфна произведению* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times \mathbf{T}^r \times \Phi$, *где* Φ *— конечная группа.*

В силу предложения 1, (i)$\Leftrightarrow$(ii); кроме того, очевидно, что (iii)$\Leftrightarrow$(iv) и (iii)$\Rightarrow$(i). Если справедливо (i), то $G = \mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^r \times D$, где D — дискретная группа, порожденная некоторой компактной частью; но тогда D — группа конечного типа и, стало быть, имеет вид $\mathbf{Z}^q \times \Phi$, где Φ — конечная группа (*Алг.*, гл. VII, § 4, n° 6, теор. 3).

Замечание 2. В соответствии с обозначениями следствия 2 отождествим группу G с $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times \Phi$; $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$ есть связная компонента единицы в G, $\mathbf{T}^q \times \Phi$ — ее максимальная компактная подгруппа, $\mathbf{T}^q$ — связная компонента единицы максимальной компактной подгруппы; целые числа p, q, r определяются однозначно группой G, согласно замечанию 1, а группа Φ определяется группой G с точностью до изоморфизма.

Предложение 2. *Предположим, что* G *компактна. Тогда существует убывающее фильтрирующееся семейство замкнутых подгрупп* H_α *в* G, *такое, что* 1) G *отождествляется с проективным пределом факторгрупп* G/H_α; 2) *каждая факторгруппа* G/H_α *изоморфна некоторой группе* $\mathbf{T}^q \times \Phi$, *где* Φ *— конечная группа.*

Действительно, поскольку группа $\hat{G}$ дискретна, она является объединением возрастающего фильтрирующегося семейства подгрупп D_α конечного типа. Положим $H_\alpha = D_\alpha^\perp$. Тогда G отождествляется с проективным пределом факторгрупп G/H_α (§ 1, следствие 2 предложения 11). С другой стороны, D_α изоморфна группе $\mathbf{Z}^q \times \Phi$, где Φ — конечная группа, стало быть, G/H_α изоморфна $\mathbf{T}^q \times \Phi$.

2. *Общий случай*

Предложение 3. (i) *Каждая локально компактная коммутативная группа представляется в виде прямого произведения подгруппы, изоморфной некоторой группе* $\mathbf{R}^n$, *и подгруппы, обладающей компактной открытой подгруппой.*

(ii) *Каждая локально компактная коммутативная группа есть объединение возрастающего фильтрующегося семейства*

открытых подгрупп, которые являются проективными пределами групп, изоморфных группам вида $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q \times \mathbf{Z}^r \times \Phi$, *где* Φ — *конечная группа.*

Утверждение (ii) вытекает из предложений 1 и 2, ибо G есть объединение возрастающего фильтрующегося семейства открытых подгрупп, порожденных компактными окрестностями элемента e.

Пусть, с другой стороны, H — одна из этих подгрупп. Тогда H представляется в виде $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$, где K — компакт (предложение 1). Каноническая сюръекция H на делимую группу $\mathbf{R}^p$ продолжается (лемма 3) до непрерывного проектора π из G на $\mathbf{R}^p$. Стало быть, G — прямое произведение $\mathbf{R}^p$ и ядра L проектора π, и $\mathbf{Z}^q \times K$ — открытая подгруппа в L. Следовательно, L/K — дискретная подгруппа.

Предложение 4. (i) *Пусть* B — *множество всех элементов из* G, *которые порождают относительно компактную подгруппу в* G. *Тогда* B *есть замкнутая подгруппа в* G.

(ii) *Пусть* C — *связная компонента единицы в* $\hat{G}$. *Тогда* $B^\perp = C$.

Так как произведение двух компактных частей из G есть компакт, то B — подгруппа. Заметим, что каждый элемент из G принадлежит некоторой открытой подгруппе, порожденной компактной окрестностью элемента e. Поэтому доказательство того, что каждый элемент из $\bar{B}$ принадлежит B, сводится (предложение 1) к случаю, когда $G = \mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^q \times K$, где K — компактная группа. Но в этом случае ясно, что $B = K$.

Докажем (ii). Предложение 3 (i) позволяет ограничиться случаем, когда G содержит компактную открытую подгруппу H. Тогда $H^\perp$ — компактная открытая подгруппа в $\hat{G}$. Стало быть, C — связная компонента единицы в $H^\perp$. С другой стороны, $B \supset H$ и B/H есть множество всех элементов из G/H, которые порождают относительно компактную подгруппу в G/H. Поскольку $H^\perp$ отождествляется с $(G/H)\hat{}$, можно ограничиться случаем, когда группа G дискретна и, стало быть, $\hat{G}$ компактна. Но тогда C есть пересечение открытых подгрупп в $\hat{G}$ (*Общ. топ.*, гл. III, 3-е изд., § 4, n° 6, предл. 14); замкнутая подгруппа в $\hat{G}$ открыта в том и только в том случае, если она имеет конечный индекс (или если ее аннулятор конечен); следствие 2 теоремы 4, § 1 показывает, что $C^\perp$ представляется в виде объединения конечных подгрупп из C, т. е. совпадает с B.

Следствие 1. *Предположим, что группа G компактна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *G — связная группа;*

(ii) *$\hat{G}$ — группа без кручения;*

(iii) *G делима.*

Это вытекает из предложения 4 и следствия 8 теоремы 4, § 1.

Следствие 2. *Предположим, что G компактна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *G вполне несвязна;*

(ii) *$\hat{G}$ состоит из элементов конечного порядка.*

Это утверждение — частный случай предложения 4.

Следствие 3. *Если группа G связна, то она делима.*

Действительно, G изоморфна некоторой группе $\mathbf{R}^n \times K$, где K — компактная связная группа (предложение 1). Поэтому достаточно применить следствие 1.

§ 3. Гармонический синтез в пространствах $L^1(G)$, $L^2(G)$, $L^\infty(G)$

1. Гармонический синтез в $L^1(G)$

В силу предложения 5, § 1, *банахова алгебра $L^1(G)$ регулярна.*

Согласно § 5, гл. I, это обстоятельство влечет за собой ряд следствий, которые мы здесь приведем в форме замечаний.

1) Если F — замкнутая часть $\hat{G}$ и K — компактная часть $\hat{G}$, такие, что $F \cap K = \varnothing$, то существует функция $f \in L^1(G)$, такая, что $\mathscr{F}f$ равно 0 на F и 1 на K (гл. I, § 5, предл. 1).

2) Для каждого идеала $\mathfrak{J}$ в $L^1(G)$ обозначим через $h(\mathfrak{J})$ множество точек из $\hat{G}$, в которых обращаются в нуль преобразования Фурье всех функций из $\mathfrak{J}$; это множество замкнуто. Для каждой части M из $\hat{G}$ пусть $\mathfrak{k}(M)$ — идеал в $L^1(G)$, состоящий из всех функций, преобразование Фурье которых обращается в нуль на M; этот идеал замкнут. Введя эти обозначения, предположим, что M — замкнутая часть $\hat{G}$. Тогда множество всех идеалов $\mathfrak{J}$ в $L^1(G)$, таких, что $h(\mathfrak{J}) = M$, содержит наибольший элемент, а именно $\mathfrak{k}(M)$, и наименьший элемент, а именно множество всех функций $f \in L^1(G)$, пре-

образование Фурье которых имеет компактный носитель, не пересекающийся с M (гл. I, § 5, предл. 4).

3) Пусть $\mathfrak{J}$ — некоторый идеал в $L^1(G)$ и g: $\hat{G} \to \mathbf{C}$ — непрерывная функция. Предположим, что для каждой точки $\chi \in \hat{G}$ существует функция $f_\chi \in \mathfrak{J}$, такая, что функция g равна $\mathscr{F}(f_\chi)$ в некоторой окрестности χ. Предположим, далее, что существует функция $f_\infty \in \mathfrak{J}$, такая, что g равна $\mathscr{F}(f_\infty)$ в дополнении к некоторой компактной части $\hat{G}$ (условие, которое тривиально выполняется, если G дискретна). Тогда существует функция $f \in \mathfrak{J}$, такая, что $g = \mathscr{F}f$ (гл. I, § 5, след. 2 предл. 2).

Лемма 1. *Множество всех функций из $L^1(G)$, преобразование Фурье которых имеет компактный носитель, является плотным подпространством в $L^1(G)$.*

Поскольку $\mathscr{K}(\hat{G})$ плотно в $L^2(\hat{G})$, подпространство V в $L^2(G)$, состоящее из всех тех $f \in L^2(G)$, для которых $\mathscr{F}f \in \mathscr{K}(\hat{G})$, плотно в $L^2(G)$. Пусть теперь $g \in L^1(G)$. Тогда существуют g_1 и $g_2 \in L^2(G)$, такие, что $g = g_1 g_2$ (можно, например, положить $g_1 = |g|^{1/2}$ и подобрать g_2 соответствующим образом). Стало быть, функция g является пределом в $L^1(G)$ функций вида $g'_1 g'_2$, где $g'_1 \in V$, $g'_2 \in V$. Остается заметить, что $\mathscr{F}(g'_1 g'_2) = (\mathscr{F}g'_1) * (\mathscr{F}g'_2)$ (§ 1, предложение 7) и $(\mathscr{F}g'_1) * (\mathscr{F}g'_2) \in \mathscr{K}(\hat{G})$.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(G)$ и $f \in L^1(G)$. Тогда если $\mathscr{F}f$ обращается в нуль в некоторой окрестности $h(\mathfrak{J})$ (см. выше замечание 2), то $f \in \mathfrak{J}$.*

Пусть $\varepsilon > 0$. Существует функция $g \in L^1(G)$, такая, что $\|f - f * g\|_1 < \varepsilon$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, предл. 20). В силу леммы 1, можно считать, что $\mathscr{F}g$ имеет компактный носитель. Тогда $\mathscr{F}(f * g) = (\mathscr{F}f)(\mathscr{F}g)$ имеет компактный носитель, не пересекающийся с $h(\mathfrak{J})$, стало быть, $f * g \in \mathfrak{J}$ (замечание 2). Так как ε можно выбрать сколь угодно малым, то $f \in \overline{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(G)$, отличный от $L^1(G)$. Тогда существует точка $\chi \in \hat{G}$, такая, что $(\mathscr{F}f)(\chi) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{J}$.*

В силу леммы 1 и следствия 1 предложения 4 гл. I, § 5, $\mathfrak{J}$ содержится в некотором регулярном максимальном идеале алгебры $L^1(G)$, т. е. в ядре некоторого характера этой алгебры.

Следствие 1. *Пусть* $f \in L^1(G)$. *Тогда если* $\mathscr{F}f$ *нигде не обращается в нуль, то функции вида* $f * \varepsilon_x$, *где* x *пробегает* G, *образуют тотальное множество в* $L^1(G)$.

Пусть V — замкнутое векторное подпространство в $L^1(G)$, порожденное функциями вида $f * \varepsilon_x$. В силу *Интегр.*, гл. VIII, § 4, след. предл. 20, подпространство V является замкнутым идеалом в $L^1(G)$. Из теоремы 1 тогда следует, что $V = L^1(G)$.

Пусть g — комплексная функция на G, Φ — фильтр на G. Назовем функцию g *слабо осциллирующей* по Φ, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют множество $M \in \Phi$ и окрестность V элемента e в G, такие, что

$$(x \in M \text{ и } y \in V) \Rightarrow |g(xy) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Следствие 2. *Пусть* Φ — *фильтр на* G, *инвариантный относительно сдвигов. Пусть, далее, функция* $f \in L^1(G)$ *такова, что* $\mathscr{F}f$ *нигде не обращается в нуль и* $\int_G f(x)\,dx = 1$. *Пусть, наконец,* $g \in L^\infty(G)$. *Предположим, что* $f * g$ *имеет конечный предел* α *по* Φ. *Тогда*

(i) *Для каждой функции* $f' \in L^1(G)$, *такой, что* $\int_G f'(x)\,dx = 1$, $f' * g$ *стремится к* α *по* Φ.

(ii) *Если дополнительно предположить, что* g — *слабо осциллирующая функция по* Φ, *то* g *стремится к* α *по* Φ.

Заменяя g функцией $g - \alpha$, можно свести утверждение к случаю $\alpha = 0$.

Пусть $\mathfrak{J}$ — множество всех функций $f' \in L^1(G)$, таких, что $f' * g$ стремится к 0 по Φ. Ясно, что $\mathfrak{J}$ — векторное подпространство в $L^1(G)$, инвариантное относительно сдвигов. Неравенство $\|h * h'\|_\infty \leqslant \|h\|_1 \|h'\|_\infty$ для $h \in L^1(G)$, $h' \in L^\infty(G)$ показывает, что $\mathfrak{J}$ — замкнутое подпространство. Стало быть, $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(G)$. Так как по предположению $f \in \mathfrak{J}$, то, в силу теоремы 1, $\mathfrak{J} = L^1(G)$. Тем самым (i) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения (ii). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $M \in \Phi$ и компактная окрестность V элемента e, такие, что

$$(x \in M \text{ и } y \in V) \Rightarrow |g(y^{-1}x) - g(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть h — характеристическая функция окрестности V и μ — мера V. В силу (i), $h * g$ стремится к 0 по Φ. Справедливо равенство

$$\frac{1}{\mu}(h * g)(z) = \frac{1}{\mu}\int_V g(x^{-1}z)\,dx = g(z) + \frac{1}{\mu}\int_V (g(x^{-1}z) - g(z))\,dx.$$

Если $z \in M$ и $x \in V$, то $|g(x^{-1}z) - g(z)| \leqslant \varepsilon$. Стало быть,

$$z \in M \Rightarrow \left|\frac{1}{\mu}(h * g)(z) - g(z)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\limsup_{\Phi} |g| \leqslant \varepsilon$. Ввиду произвольности ε получаем утверждение (ii).

Пример. Пусть $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ — степенной ряд с комплексными коэффициентами и A — постоянная, такая, что $n|a_n| \leqslant A$ для всех n. Для $z \in \mathbf{C}$ и $|z| < 1$ пусть $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$. Допустим, что $f(x)$ стремится к некоторому конечному числу l, когда x стремится к 1, принимая вещественные значения, меньшие 1. Тогда *ряд* $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ *сходится и его сумма равна* l.

При переходе к группе $\mathbf{R}_+^*$ мы сможем интерпретировать функцию $\xi \mapsto f(e^{-\xi})$, где $\xi \in \mathbf{R}_+^*$, как некоторую свертку. Для $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ положим

$$g(\lambda) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant \lambda} a_n.$$

Если $0 < \lambda \leqslant \lambda'$, то, обозначая через $[\lambda]$ целую часть λ, имеем

$$\begin{aligned}(1) \qquad |g(\lambda') - g(\lambda)| &= \left|\sum_{\lambda < n \leqslant \lambda'} a_n\right| \leqslant \\ &\leqslant |a_{[\lambda+1]}| + \left|\sum_{\lambda+1 < n \leqslant \lambda'} a_n\right| \leqslant \\ &\leqslant |a_{[\lambda+1]}| + A \int_{\lambda}^{\lambda'} \frac{dt}{t} = \\ &= |a_{[\lambda+1]}| + A \log \frac{\lambda'}{\lambda}.\end{aligned}$$

Эта формула показывает, что $g(\lambda)$ — слабо осциллирующая функция, когда $\lambda \to +\infty$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}&a_0(1-z) + (a_0 + a_1)(z - z^2) + (a_0 + a_1 + a_2)(z^2 - z^3) + \ldots + \\ &+ (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(z^n - z^{n+1}) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + \\ &+ a_n z^n - z^{n+1}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n).\end{aligned}$$

Из неравенства

$$|z^{n+1}(a_2 + a_3 + \ldots + a_n)| \leqslant A|z|^{n+1} \log n$$

следует, что $z^{n+1}(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ стремится к 0, когда $n \to +\infty$, а $|z| < 1$. Таким образом, для $0 < x < 1$

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(x^n - x^{n+1}).$$

Этот ряд сходится; стало быть, для $\xi \in \mathbf{R}_+^*$

$$(2) \qquad f(e^{-\xi}) = \sum_{n \geqslant 0} \int_{n\xi}^{(n+1)\xi} g\left(\frac{x}{\xi}\right) e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} g\left(\frac{x}{\xi}\right) e^{-x}\, dx.$$

Функция $x \mapsto g\left(\frac{x}{\xi}\right) e^{-x}$ в силу (1) интегрируема. Заметим сначала, что

$$\left| f(e^{-\xi}) - g\left(\frac{1}{\xi}\right) \right| = \left| \int_0^{\infty} \left(g\left(\frac{x}{\xi}\right) - g\left(\frac{1}{\xi}\right) \right) e^{-x}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\infty} A(1 + |\log x|) e^{-x}\, dx < +\infty,$$

и, стало быть, $g \in L^\infty(\mathbf{R}_+^*)$.

Наша задача свелась к доказательству равенства $\lim_{\lambda \to 0,\ \lambda > 0} g(1/\lambda) = l$. Но в силу (2), *функция* $\xi \mapsto f(e^{-\xi})$ *на группе* $\mathbf{R}_+^*$ (функция, которая стремится к l, когда $\xi \to 0$) *представляется в виде свертки* g *и функции* $x \mapsto xe^{-x}$ (если взять в качестве меры Хаара на $\mathbf{R}_+^*$ меру dx/x). Ясно, что эта последняя функция принадлежит $L^1(\mathbf{R}_+^*)$ и ее интеграл равен 1. Согласно следствию 2, достаточно доказать, что ее преобразование Фурье нигде не обращается в нуль. Так как $x \mapsto \log x$ есть изоморфизм из $\mathbf{R}_+^*$ на $\mathbf{R}$, то каждый характер группы $\mathbf{R}_+^*$ имеет вид $x \mapsto e^{iy \log x} = x^{iy}$, где $y \in \mathbf{R}$. Таким образом, все свелось к доказательству того, что

$$\int_0^{\infty} xe^{-x} x^{iy}\, dx/x \neq 0,$$

т. е. того, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{iy}\, dx \neq 0.$$

Но хорошо известно (*Функц. действ. пер.*, гл. VII, § 2, n° 1), что функция $z \mapsto \Gamma(z)$ голоморфна и не обращается в нуль, когда $\Re z > 0$. В силу предложения 3, § 1, там же, $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$ для положительных вещественных z и,

стало быть, для $\Re z > 0$ после аналитического продолжения (см. *Var.*, R.); следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{iy} dx = \Gamma(1+iy) \neq 0.$$

Лемма 2. *Пусть K — компактная часть G и $\eta > 0$. Тогда существует функция $j \in L^1(G)$, обладающая такими свойствами:*

1) $\| j \|_1 \leqslant 2$;

2) $\mathcal{F} j = 1$ *в окрестности нейтрального элемента группы* $\hat{G}$;

3) $\| j - j * \varepsilon_x \|_1 \leqslant \eta$ *для всех* $x \in K$.

Существует окрестность U элемента e в $\hat{G}$, такая, что

$$\hat{x} \in U \Rightarrow |1 - \langle x, \hat{x} \rangle| \leqslant \eta/4 \quad \text{для всех} \quad x \in K.$$

Уменьшая, если понадобится, окрестность U, можно считать ее открытой, симметричной и интегрируемой относительно меры Хаара m на $\hat{G}$, ассоциированной с мерой dx. Далее, существует симметричная компактная окрестность V элемента e в $\hat{G}$, такая, что $V \subset U$ и $m(U) \leqslant 2m(V)$. Характеристические функции окрестностей U и V можно записать в виде $\mathcal{F} u$ и $\mathcal{F} v$, где $u \in L^2(G)$, $v \in L^2(G)$. Мы покажем, что функция $j = m(V)^{-1} uv$, принадлежащая $L^1(G)$, обладает нужными свойствами.

1) Имеем

$$\| j \|_1 \leqslant m(V)^{-1} \| u \|_2 \| v \|_2 = m(V)^{-1} \| \mathcal{F} u \|_2 \| \mathcal{F} v \|_2 = m(V)^{-1} m(U)^{1/2} m(V)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}.$$

2) Существует окрестность W элемента e в $\hat{G}$, такая, что $VW \subset U$ (*Общ. топ.*, гл. II, § 4, предл. 4). Для $\hat{x} \in W$ имеем, в силу предложения 7, § 1,

$$(\mathcal{F} j)(\hat{x}) = m(V)^{-1} (\mathcal{F} u * \mathcal{F} v)(\hat{x}) = m(V)^{-1} \int_{\hat{G}} (\mathcal{F} u)(\hat{y}) (\mathcal{F} v)(\hat{y}^{-1} \hat{x}) \, dm(\hat{y}).$$

Но условие $(\mathcal{F} v)(\hat{y}^{-1} \hat{x}) \neq 0$ влечет за собой $\hat{y}^{-1} \hat{x} \in V$, следовательно, $\hat{y} \in V^{-1} \hat{x} \subset VW \subset U$ и, стало быть, $(\mathcal{F} u)(\hat{y}) = 1$. Поэтому

$$(\mathcal{F} j)(\hat{x}) = m(V)^{-1} \int_{\hat{G}} (\mathcal{F} v)(\hat{y}^{-1} \hat{x}) \, dm(\hat{y}) = m(V)^{-1} \int_{\hat{G}} (\mathcal{F} v)(\hat{y}) \, dm(\hat{y}) = 1.$$

3) Если $x \in K$, то

$$\| u - u * \varepsilon_x \|_2^2 = \int_{\hat{G}} |(\mathcal{F}u)(\hat{x})(1 - \overline{\langle x, \hat{x}\rangle})|^2 \, dm(\hat{x}) \leqslant m(U)(\eta/4)^2$$

и, аналогично, $\| v - v * \varepsilon_x \|_2^2 \leqslant m(V)(\eta/4)^2$; следовательно,

$$\| j - j * \varepsilon_x \|_1 = m(V)^{-1} \| u(v - v * \varepsilon_x) + (v * \varepsilon_x)(u - u * \varepsilon_x) \|_1 \leqslant$$

$$\leqslant m(V)^{-1} \left(\| u \|_2 \, m(V)^{1/2} \frac{\eta}{4} + \| v \|_2 \, m(U)^{1/2} \frac{\eta}{4} \right) \leqslant$$

$$\leqslant 2m(V)^{-1} \, m(U)^{1/2} \, m(V)^{1/2} \frac{\eta}{4} =$$

$$= m(U)^{1/2} \, m(V)^{-1/2} \frac{\eta}{2} < \eta.$$

Предложение 2. *Алгебра $L^1(G)$ удовлетворяет условию Диткина* (гл. I, § 5, n° 2, опр. 2).

Пусть функция $f \in L^1(G)$ такова, что $\| f \|_1 = 1$. Пусть χ — характер $L^1(G)$; рассмотрим отдельно случаи, когда характер χ нулевой и ненулевой. Если χ — нулевой характер, то достаточно проверить, что существует последовательность $(g_1, g_2, \ldots)$ в $L^1(G)$, такая, что $\| f - g_n * f \|_1$ стремится к 0 и $\mathcal{F}g_n$ обращаются в 0 вне некоторой компактной части в $\hat{G}$, а это следует непосредственно из леммы 1. Теперь предположим, что $\chi \in \hat{G}$ и $(\mathcal{F}f)(\chi) = 0$. Нужно доказать существование последовательности $(f_1, f_2, \ldots)$ в $L^1(G)$, такой, что $\| f - f * f_n \|_1$ стремится к 0 и $\mathcal{F}f_n$ обращаются в 0 в некоторой окрестности точки χ. С помощью сдвигов в $\hat{G}$ этот случай сводится к тому, когда $\chi = e$. Существуют функция $u_n \in L^1(G)$, такая, что $\| u_n \|_1 = 1$ и

$$\| f - f * u_n \|_1 \leqslant 1/n,$$

и компакт K_n в G, такой, что $\int_{G - K_n} |f(x)| \, dx \leqslant 1/n$. В силу леммы 2 существует функция $j_n \in L^1(G)$, такая, что $\| j_n \|_1 \leqslant 2$, $\mathcal{F}j_n = 1$ в некоторой окрестности элемента e и $\| j_n - j_n * \varepsilon_x \|_1 \leqslant 1/n$ для всех $x \in K_n$. Положим $f_n = u_n - j_n * u_n$ и покажем, что последовательность (f_n) обладает требуемыми свойствами. Ясно, что

$$\mathcal{F}f_n = \mathcal{F}u_n - (\mathcal{F}j_n)(\mathcal{F}u_n)$$

обращается в нуль в некоторой окрестности элемента e. С другой стороны,

$$\| f * f_n - f \|_1 \leqslant \| f * u_n - f \|_1 + \| f * j_n \|_1 \| u_n \|_1 \leqslant$$

$$\leqslant 1/n + \| f * j_n \|_1.$$

Но для почти всех $y \in G$ мы имеем

$$(f * j_n)(y) = \int_G f(x)\, j_n(x^{-1}y)\, dx = \int_G f(x)\,(j_n(x^{-1}y) - j_n(y))\, dx,$$

потому что $0 = (\mathcal{F}f)(e) = \int_G f(x)\, dx$; отсюда

$$\|f * j_n\|_1 \leqslant \int_G |f(x)|\, \|j_n * \varepsilon_x - j_n\|_1\, dx =$$

$$= \int_{K_n} |f(x)|\, \|j_n * \varepsilon_x - j_n\|_1\, dx + \int_{G - K_n} |f(x)|\, \|j_n * \varepsilon_x - j_n\|_1\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \int_{K_n} |f(x)|\, dx + 4 \int_{G - K_n} |f(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{n} + \frac{4}{n} = \frac{5}{n}.$$

Окончательно $\|f * f_n - f\|_1 \leqslant 6/n$, чем и завершается доказательство предложения.

Применяя предложение 5 § 5 гл. I, получим теперь следующий результат:

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{I}$ — замкнутый идеал в $L^1(G)$, такой, что граница множества $h(\mathfrak{I})$ (замечание 2) не содержит непустых совершенных множеств. Тогда $\mathfrak{I}$ совпадает с множеством всех функций $f \in L^1(G)$, таких, что $\mathcal{F}f$ обращается в нуль на $h(\mathfrak{I})$.*

Напротив, для произвольного замкнутого идеала в $L^1(G)$ заключение теоремы 2 неверно (см. упр. 9). Более того, можно показать, что если G не компактна, то существует замкнутый идеал в $L^1(G)$, который не является самосопряженным [1]).

Следствие. *Если замкнутый идеал $\mathfrak{I}$ в $L^1(G)$ содержится в единственном регулярном максимальном идеале, то сам идеал $\mathfrak{I}$ является регулярным максимальным.*

2. Гармонический синтез в $L^\infty(G)$

В этом пункте мы будем отождествлять пространство $L^\infty(G)$ с двойственным к $L^1(G)$, снабдив его слабой топологией $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$.

Отображение $W \to W^0$ есть биекция множества слабо замкнутых векторных подпространств в $L^\infty(G)$ на множество замкнутых векторных подпространств в $L^1(G)$.

С другой стороны, если $f \in L^1(G)$ и $x \in G$, то сопряженным к эндоморфизму $g \to f * g$ (соответственно $g \to \varepsilon_x * g$) бана-

[1]) См., например, Rudin W., Fourier analysis on groups, Interscience tracts in pure and applied mathematics, теорема 7.7.1.

хова пространства $L^1(G)$ является эндоморфизм $g' \mapsto \check{f} * g'$ (соответственно $g' \mapsto \varepsilon_{x^{-1}} * g'$) банахова пространства $L^\infty(G)$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, n° 3, пример 6). Для того чтобы замкнутое векторное подпространство в $L^1(G)$ было идеалом в $L^1(G)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было инвариантным относительно сдвигов на G. Стало быть, *для того чтобы слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$ было инвариантным относительно свертки с элементами из $L^1(G)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было инвариантным относительно сдвигов на G.*

Пусть U — слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$. Предположим, что U (а значит, U^0) инвариантно относительно сдвигов на G. Пусть $f \in L^1(G)$. Для каждой функции $g \in L^\infty(G)$ имеем $(\check{f} * g)(x) = \langle \varepsilon_x * f, g \rangle$. Стало быть, *для того чтобы функция f принадлежала U^0, необходимо и достаточно, чтобы $\check{f} * g = 0$ для всех $g \in U$.*

Если W — векторное подпространство в $L^\infty(G)$, слабо замкнутое и инвариантное относительно сдвигов, то мы обозначим через $A(W)$ множество всех $\chi \in \hat{G}$, принадлежащих W; это множество является замкнутой частью в $\hat{G}$. Если F — замкнутая часть в $\hat{G}$, то мы обозначим через $V(F)$ слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$, порожденное элементами из F; поскольку каждый сдвиг на G переводит любой характер в пропорциональную ему функцию, $V(F)$ инвариантно относительно сдвигов. Применяя обозначения h и $\mathfrak{k}$, введенные в замечании 2, n° 1, получаем, что

$$A(W) = (h(W^0))^{-1}, \tag{3}$$

$$V(F) = (\mathfrak{k}(F^{-1}))^0. \tag{4}$$

Из соотношений $h(\mathfrak{k}(F)) = F$, $\mathfrak{k}(h(I)) \supset I$ следует, что

$$A(V(F)) = F, \tag{5}$$

$$V(A(W)) \subset W. \tag{6}$$

Предложение 3. *Пусть W — ненулевое слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$, инвариантное относительно сдвигов. Тогда W содержит по крайней мере один характер группы G.*

Действительно, $W^0 \neq L^1(G)$ и, стало быть, $h(W^0) \neq \varnothing$ (теорема 1); следовательно, $A(W) \neq \varnothing$ (формула (3)).

Предложение 4. *Пусть W — слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$, инвариантное относительно сдвигов. Тогда*

(i) *Для любой окрестности U множества $A(W)$ в $\hat{G}$ каждая функция из W является слабым пределом линейных комбинаций характеров, принадлежащих U.*

(ii) *Если граница множества $A(W)$ не содержит непустых совершенных множеств, то каждая функция из W является слабым пределом линейных комбинаций характеров, принадлежащих W.*

Для доказательства утверждения (i) достаточно доказать следующее: пусть f — функция из $L^1(G)$, ортогональная к элементам из U; тогда f ортогональна к W. Но $\mathscr{F}f$ обращается в нуль на множестве U^{-1}, которое является окрестностью $h(W^0)$ (формула (3)); стало быть, $f \in W^0$ (предложение 1). Утверждение (ii) устанавливается аналогично с применением теоремы 2 вместо предложения 1.

Пусть W — слабо замкнутое векторное подпространство в $L^\infty(G)$, инвариантное отиосительно сдвигов. Отыскание характеров, принадлежащих W, иногда называют «гармоническим анализом» в W. Предложение 4 выражает то обстоятельство, что можно в некотором смысле восстановнть элементы из W с помощью вышеупомянутых характеров, или, как говорят, осуществить «гармонический синтез» в W. В более широком смысле решение проблем, аиалогичных или эквивалентных рассмотренным в n° 1 и 3, также называют «гармоническим синтезом».

3. Гармонический синтез в $L^2(G)$

Лемма 3. *Пусть X — локально компактное пространство, μ — некоторая неотрицательная мера на X. Для каждой функции $f \in L^\infty(X, \mu)$ пусть V_f — отображение $\varphi \to \varphi f$ пространства $L^2(X, \mu)$ в себя. Пусть T — непрерывный эндоморфизм гильбертова пространства $L^2(X, \mu)$, коммутирующий с V_f для каждой функции $f \in \mathscr{K}(X)$. Тогда существует функция $g \in L^\infty(X, \mu)$, такая, что $T = V_g$.*

1) Пусть $f \in L^\infty(X, \mu)$; покажем, что T коммутирует с V_f. Для любых $g, h \in L^2(X, \mu)$ имеем

$$(TV_f g \mid h) - (V_f Tg \mid h) = (fg \mid T^*h) - (f(Tg) \mid h) =$$

$$= \int f(x)\, g(x)\, \overline{(T^* h)}(x)\, d\mu(x) -$$

$$- \int f(x)\, (Tg)(x)\, \bar{h}(x)\, d\mu(x).$$

Но

$$g \cdot \overline{(T^* h)} \in L^1(X, \mu) \text{ и } (Tg) \cdot \bar{h} \in L^1(X, \mu);$$

стало быть, $(TV_f g \mid h) - (V_f Tg \mid h)$ — непрерывная функция от элемента f в топологии $\sigma(L^\infty(X, \mu), L^1(X, \mu))$; по предположению эта функция равна нулю для всех $f \in \mathscr{K}(X)$, следова-

тельно, она тождественно равна нулю. Тем самым доказано, что $TV_f = V_f T$.

2) Пусть Y — некоторая μ-измеримая часть X, φ_Y — ее характеристическая функция, H_Y — подпространство в $L^2(X, \mu)$, состоящее из функций, равных нулю на $X - Y$. Тогда, в силу 1), T коммутирует с V_{φ_Y} и $V_{\varphi_{X-Y}}$, т. е. оставляет инвариантными подпространства H_Y и H_{X-Y}. Обозначим через T_Y сужение T на H_Y.

3) Предположим, что X — компакт. Тогда $1 \in L^2(X, \mu)$. Положим $g = T(1) \in L^2(X, \mu)$. Пусть Y — множество всех таких $x \in X$, что $|g(x)| > \|T\|$. В силу 2), имеет место равенство $T(\varphi_Y \cdot 1) = \varphi_Y \cdot T(1) = \varphi_Y g$, следовательно,

$$\int_Y |g(x)|^2 d\mu(x) \leqslant \|T\|^2 \int_Y d\mu(x).$$

Стало быть, множество Y является μ-пренебрежимым. Таким образом, $|g| \leqslant \|T\|$ почти всюду. С другой стороны, для каждой функции $f \in \mathscr{K}(X)$ имеем

$$T(f) = T(V_f 1) = V_f(T1) = V_f g = fg = V_g f,$$

откуда $T = V_g$.

4) Перейдем к общему случаю. Существует локально счетное семейство (X_α) попарно непересекающихся компактных частей в X, таких, что $X - \bigcup_\alpha X_\alpha$ — локально пренебрежимое множество (*Интегр.*, гл. IV, 2-е изд., § 5, n° 9, предл. 14). Применим 3) к каждому T_{K_α}. Тогда существует функция g_α, измеримая на K_α, такая, что $|g_\alpha| \leqslant \|T\|$ на K_α и $T_{K_\alpha} f = g_\alpha f$ для $f \in H_{K_\alpha}$. Пусть g — функция на X, равная g_α на K_α для каждого α и 0 на $X - \bigcup_\alpha K_\alpha$. Тогда g — элемент из $L^\infty(X, \mu)$. Операторы V_g и T совпадают на каждом H_{K_α} и потому на $L^2(X, \mu)$.

Предложение 5. (i) *Пусть M — измеримая часть $\hat{G}$ (относительно меры Хаара). Тогда множество всех таких $f \in L^2(G)$, что $\mathscr{F}f$ обращается в нуль почти всюду на M, является замкнутым векторным подпространством E_M в $L^2(G)$, инвариантным относительно сдвигов.*

(ii) *Пусть M и M' — измеримые части в $\hat{G}$. Для того чтобы $E_M = E_{M'}$, необходимо и достаточно, чтобы M и M' совпадали с точностью до локально пренебрежимого множества.*

(iii) *Всякое замкнутое векторное подпространство в* $L^2(G)$, *инвариантное относительно сдвигов, совпадает с* E_M *при некотором* M.

Утверждение (i) немедленно следует из теоремы Планшереля.

Если M и M' совпадают с точностью до локально пренебрежимого множества, то ясно, что $E_M = E_{M'}$. Если же M и M' не обладают этим свойством, то существует, например, компактное множество K, не пренебрежимое и такое, что $K \subset M$, $K \subset \hat{G} - M'$; пусть φ_K — его характеристическая функция. Поскольку $\varphi_K \in L^2(\hat{G})$, существует функция $f \in L^2(G)$, такая, что $\mathcal{F}f = \varphi_K$. Тогда $f \in E_{M'}$, $f \notin E_M$ и, стало быть, $E_M \neq E_{M'}$. Тем самым (ii) доказано.

Пусть, наконец, E — замкнутое векторное подпространство в $L^2(G)$, инвариантное относительно сдвигов. Тогда для каждой функции $f \in L^1(G)$ подпространство E и ортогональное дополнение к E в $L^2(G)$ инвариантны относительно эндоморфизма $\varphi \mapsto f * \varphi$ в $L^2(G)$ (*Интегр.*, гл. VIII, § 4, предл. 6 (iii)); стало быть, ортогональный проектор P_E на E коммутирует с этим эндоморфизмом. Выберем в качестве f преобразование Фурье функции вида $g_1 * g_2$, где $g_1, g_2 \in \mathcal{K}(\hat{G}_2)$. Принимая во внимание предложение 7 § 1, мы видим, что эндоморфизм $\mathcal{F}P_E\mathcal{F}^{-1}$ пространства $L^2(\hat{G})$ (где $\mathcal{F} = \mathcal{F}_G$) коммутирует с оператором умножения на $g_1 * g_2$. Для каждой функции $g \in L^\infty(\hat{G})$ обозначим через V_g эндоморфизм $\psi \mapsto g\psi$ пространства $L^2(\hat{G})$. По непрерывности из предшествующего результата следует, что $\mathcal{F}P_E\mathcal{F}^{-1}$ коммутирует с V_g для $g \in \mathcal{K}(G)$. В силу леммы 3, $\mathcal{F}P_E\mathcal{F}^{-1}$ имеет вид V_h с некоторой функцией $h \in L^\infty(\hat{G})$. Так как $P_E = P_E^* = P_E^2$, то $V_h = V_h^* = V_h^2$ и, стало быть, $h = \bar{h} = h^2$, так что h — характеристическая функция некоторого измеримого множества M. Если $f \in L^2(G)$, то

$f \in E \Leftrightarrow P_E f = f \Leftrightarrow V_h \mathcal{F}f = \mathcal{F}f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathcal{F}f$ обращается в нуль почти всюду на $\hat{G} - M \Leftrightarrow f \in E_{\hat{G}-M}$,

откуда следует утверждение (iii).

Во всех упражнениях главы II через G обозначается, если не оговорено противное, коммутативная локально компактная группа.

§ 1

1) Пусть $G = \mathbf{R}$.

a) Пусть ω, p, $q \in \mathbf{R}$ и $p \leqslant q$. Положим $f(x) = e^{i\omega x}$ для $p \leqslant x \leqslant q$, $f(x) = 0$ для $x > q$ или $x < p$. Тогда

$$(\mathscr{F}f)(y) = i\,\frac{e^{ip(\omega-2\pi y)} - e^{iq(\omega-2\pi y)}}{\omega - 2\pi y}.$$

b) Пусть $\omega \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$. Положим $f(x) = e^{(-\beta+i\omega)x}$ для $x \geqslant 0$, $f(x) = 0$ для $x < 0$. Тогда

$$(\mathscr{F}f)(y) = \frac{i}{\omega - 2\pi y + i\beta}.$$

c) Пусть $a > 0$. Положим $f(x) = \frac{1}{a}\,e^{-a|x|}$. Тогда

$$(\mathscr{F}f)(y) = \frac{2}{4\pi^2 y^2 + a^2}.$$

d) Положим $f(x) = e^{-x^2/2}$. Тогда

$$(\mathscr{F}f)(y) = \sqrt{2\pi}\,e^{-2\pi^2 y^2}.$$

(Полагая $g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 - iyx}\,dx$, убедиться в справедливости равенства $g'(y) = -yg(y)$, после чего применить формулу $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ из *Функц. действ. пер.*, гл. VII, § 1, п° 3.)

¶ 2) a) Показать, что функции $t \longmapsto t^n e^{-\pi t^2}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ образуют тотальное множество в $L^2(\mathbf{R})$. (Пусть $f \in L^2(\mathbf{R})$ — ортогональная функция к каждой из функций $t^n e^{-\pi t^2}$. Полагаи

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-\pi t^2} e^{2\pi i t z}\,dt, \qquad z \in \mathbf{C},$$

показать, что F — целая функция, все производные которой в точке 0 равны нулю. Вывести отсюда, что $\mathscr{F}(fe^{-\pi t^2}) = 0$.)

b) Пусть $k \in \mathbf{N}$, $P \in \mathbf{C}[t]$, α — старший коэффициент P. Показать,

что тогда интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} ((d^k/dt^k)\, e^{-2\pi t^2})\, P(t)\, dt$ равен 0, если $\deg P < k$, и $(-1)^k\, k!\, 2^{-1/2}\, \alpha$, если $\deg P = k$.

c) Имеет место равенство $(d^k/dt^k)(e^{-2\pi t^2}) = P_k(t)\, e^{-2\pi t^2}$, где P_k — многочлен степени k со старшим коэффициентом $(-1)^k 2^{2k} \pi^k$.

d) Для $m \in \mathbf{N}$ и $t \in \mathbf{R}$ положим

$$\mathscr{H}_m(t) = (-1)^m\, (m!)^{-1/2} 2^{(1/4)-m} \pi^{-m/2} e^{2\pi t^2} \frac{d^m}{dt^m} (e^{-2\pi t^2});$$

$\mathscr{H}_m$ называются функциями Эрмита. Показать, что они образуют ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$. (Применить a), b), c).)

e) Показать, что $\mathscr{F}(\mathscr{H}_m) = (-i)^m \mathscr{H}_m$.

3) a) Пусть $\alpha > 0$, $h > 0$ и $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — функция, равная нулю вне $]-\alpha, \alpha[$, линейная на $[-\alpha, 0]$ и $[0, \alpha]$ и равная h в точке 0. Показать, что тогда

$$(\mathscr{F}f)(t) = \frac{h}{\alpha\pi^2} \frac{\sin^2 \pi\alpha t}{t^2}.$$

b) Пусть

$$g(x) = \sum_{n=-N}^{N} f(x+n).$$

Тогда

$$(\mathscr{F}g)(t) = \frac{h}{\alpha\pi^2} \frac{\sin^2 \pi\alpha t}{t^2} \frac{\sin(2N+1)\pi t}{\sin \pi t}.$$

c) Для заданных последовательностей (h_i), (α_i), (N_i) пусть g_i (при каждом i) — функция, полученная, как в b). Пусть $\sum_i h_i < +\infty$, так что $\sum_i g_i$ сходится равномерно к некоторой непрерывной функции g. Показать, что если $\sum_i h_i \alpha_i N_i < +\infty$, $\sum_i \frac{h_i}{\alpha_i} \log N_i < +\infty$ и $\sum_i h_i N_i = +\infty$ (например, если $h_i = 1/i^2$, $\alpha_i = 1/\sqrt{i}$, $N_i = i$), то функции g и $\mathscr{F}g$ интегрируемы, но $\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = +\infty$.

4) a) Пусть G G_1 — локально компактные коммутативные группы, $\varphi\colon G \to G_1$ — непрерывный морфизм, $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ и $\mu_1 = \varphi(\mu)$. Показать, что тогда $\mathscr{F}\mu_1 = \mathscr{F}\mu \circ \widehat{\varphi}$.

b) Пусть σ — автоморфизм группы G, Δ — его модуль, $f \in L^1(G)$ и $f' = f \circ \sigma$. Показать, что тогда $(\mathscr{F}f')(\hat{x}) = \Delta(\sigma)^{-1} (\mathscr{F}f)(\hat{\sigma}^{-1}\hat{x})$.

5) Пусть $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$. Предположим, что $\mathscr{F}\mu \in L^1(\widehat{G})$. Показать, что существует $f \in L^1(G)$, такая, что $d\mu(x) = f(x)\, dx$. (Воспользоваться фильтром $\mathfrak{B}$ из леммы 1. Тогда $\varphi * \mu$ стремится слабо к μ по $\mathfrak{B}$ и $\mathscr{F}(\varphi * \mu) = (\mathscr{F}\varphi)(\mathscr{F}\mu)$ стремится к $\mathscr{F}\mu$ в $L^1(\widehat{G})$, а, стало быть, $\varphi * \mu = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}(\varphi * \mu))$ стремится к $\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}\mu)$ в $\mathscr{C}^0(G)$. Следовательно, $d\mu(x) = (\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\mu)(x)\, dx$.)

6) Пусть H — подгруппа в G и $\mu \in \mathscr{M}^1(\widehat{G})$. Показать, что для инвариантности $\mathscr{F}\mu$ относительно сдвигов, определяемых элементами из H, необходимо и достаточно, чтобы носитель μ содержался в $H^\perp$.

7) Пусть $f \in L^1(G)$. Пусть F — голоморфная функция, определенная в открытой части U в $\mathbf{C}$ и обладающая следующими свойствами: α) U содержит множество значений $\mathscr{F}f$; β) если G не дискретна, то $0 \in U$ и $F(0) = 0$. Показать, что тогда существует функция $g \in L^1(G)$, такая, что $F \circ (\mathscr{F}f) = \mathscr{F}g$. (Применить голоморфное функциональное исчисление в алгебре, полученной из $L^1(G)$ присоединением единицы.)

8) Пусть $p \in (1, 2)$ и $p' \in (2, +\infty)$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Пусть $f \in \mathscr{K}(G)$. Показать, что $\| \mathscr{F}f \|_{p'} \leqslant \| f \|_p$. (Это неравенство известно для $p = 1$ и $p = 2$. В общем случае применить неравенство М. Рисса (*Интегр.*, гл. IV, 2-е изд., § 6, упр. 18).) Вывести отсюда, что отображение $\mathscr{F} \mid \mathscr{K}(G)$ продолжается до непрерывного линейного отображения из $L^p(G)$ в $L^{p'}(\widehat{G})$, совпадающее с преобразованием Фурье на $L^p(G) \cap L^1(G)$ и на $L^p(G) \cap L^2(G)$.

¶ 9) Пусть G — локально компактная группа (не обязательно коммутативная), снабженная левой мерой Хаара.

a) Показать, что если $f \in L^1(G)$, то существуют $f_1, f_2 \in L^1(G)$, такие, что $f_1 * f_2 = f$. (Воспользоваться упражнением 22 b) гл. I, § 2.)

b) Пусть $f_1, f_2 \in L^1(G)$ и $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$. Показать, что $f_1 * f_2$ совпадает почти всюду с функцией, полунепрерывной снизу. (Рассматривать f_1 как предел в смысле простой сходимости возрастающей последовательности неотрицательных функций из $L^\infty(G)$.)

c) Положим, $G = \mathbf{R}$. Для каждого открытого интервала $I =]a, b[$ положим $A(I) =]a, a + (b-a)/6[$, $A'(I) =]a + 5(b-a)/6, b[$. Пусть $I'_0 =]0, 1[$, $I_1 = A(I'_0)$, $I'_1 = A'(I'_0)$, $I_2 = A(I'_1)$, $I'_2 = A'(I'_1)$, ..., $I_n = A(I'_{n-1})$, $I'_n = A'(I'_{n-1})$, ... Пусть, далее, $F = I_1 \cup I_2 \cup \ldots$. Показать, что не существует таких двух частей F_1 и F_2 из $\mathbf{R}$, что $F_1 + F_2 = F$. Показать, далее, что если f — непрерывная неотрицательная функция на $\mathbf{R}$, такая, что $F = \{x \mid f(x) > 0\}$, то не существует ни одной пары функций $f_1, f_2 \in L^1(\mathbf{R})$, таких, что $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$ и $f = f_1 * f_2$. (Предположим, что такое равенство имеет место. Пусть E_i — множество всех $x \in \mathbf{R}$, таких, что $f_i(x) > 0$. Пусть F_i — множество точек плотности E_1 (*Интегр.*, гл. V, § 6, упр. 15). Показать, что $F = F_1 + F_2$.)

10) Пусть $k \in \mathbf{Z}$. Показать, что следующие условия эквивалентны: α) отображение $x \mapsto x^k$ из G в G инъективно; β) отображение $\hat{x} \mapsto \hat{x}^k$ из $\widehat{G}$ в $\widehat{G}$ сюръективно.

11) Пусть $(G_i)_{i \in I}$ — семейство локально компактных коммутативных групп. Для каждого $i \in I$ пусть H_i — компактная открытая подгруппа в G_i. Пусть G — локальное прямое произведение G_i относительно H_i (*Общ. топ.*, гл. III, 3-е изд., § 2, упр. 26). Для каждого $\chi \in \widehat{G}$ пусть χ_i — сужение χ на G_i. Показать, что $\chi \mapsto (\chi_i)_{i \in I}$ есть изоморфизм топологической группы $\widehat{G}$ на локальное прямое произведение $\widehat{G}_i$ относительно $H_i^\perp$.

12) Пусть G_d есть группа G, снабженная дискретной топологией, и χ — унитарный характер G_d. Показать, что при любом выборе $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ и $\varepsilon > 0$ существует элемент $\hat{x} \in \widehat{G}$, такой, что $|\hat{x}(x_i) - \chi(x_i)| \leqslant \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Каноническая инъекция из G_d в G имеет в качестве двойственной морфизм из $\widehat{G}$ в $(G_d)\widehat{\ }$, образ которого плотен в силу следствия 6 теоремы 4.)

13) a) Показать, что $L^1(G)$ — замкнутый идеал в $\mathscr{M}^1(G)$ и, следовательно, $\widehat{G}$ отождествляется с некоторой открытой частью в $X(\mathscr{M}^1(G))$. (См. гл. I, § 3, упр. 17.)

b) Если $\mathscr{M}_d(G)$ (соответственно $\mathscr{M}_a(G)$) — множество рассеянных (соответственно атомических) мер $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$, то $\mathscr{M}_d(G)$ — замкнутый идеал в $\mathscr{M}^1(G)$, а $\mathscr{M}_a(G)$ — замкнутая подалгебра в $\mathscr{M}^1(G)$.

¶14) Пусть $E \subset G$. Говорят, что множество E *независимо*, если для любой системы $x_1, \ldots, x_k$ попарно различных элементов из E и целых чисел $n_1, \ldots, n_k$ из равенства $x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k} = e$ следует, что $x_1^{n_1} = \ldots = x_k^{n_k} = e$. Множество E называют *множеством Кронекера*, если любая непрерывная комплексная функция на E, равная по абсолютной величине 1, является равномерным пределом на E унитарных характеров группы G. Пусть $G = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$. Говорят, что E — множество *типа* K_q, если каждое непрерывное отображение E в множество корней q-й степени из единицы совпадает на E с некоторым унитарным характером группы G.

a) Пусть P — компактное множество Кронекера. Показать, что если мера $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ сосредоточена на P, то $\sup |\mathscr{F}\mu| = \|\mu\|$. Вывести отсюда, что каждая непрерывная комплексная функция на P представляется в виде $\mathscr{F}f | P$, где $f \in L^1(\hat{G})$.

b) Пусть $E \subset G$ — конечное независимое множество, и пусть f — комплексная функция, равная по абсолютной величине 1 на E. Предположим, что для элемента $x \in E$ порядка q имеет место равенство $f(x)^q = 1$. Показать, что тогда функция f является равномерным пределом на E унитарных характеров группы G. (Применить упр. 12.)

c) Показать, что каждое множество Кронекера независимо и содержит только элемеиты бесконечиого порядка.

d) Показать, что каждое множество типа K_q в $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$ независимо.

e) Пусть $V_1, \ldots, V_k$ — непустые открытые непересекающиеся части G. Показать, что если любая окрестность элемента e в G содержит элементы бесконечного порядка, то существуют $x_i \in V_i$, такие, что $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — множество Кронекера. Если $G = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, то существуют $x_i \in V_i$, такие, что $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — множество типа K_q.

f) Пусть $E \subset G$ — независимое компактное множество, $F = E \cup E^{-1}$ и $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ — рассеянная мера, сосредоточенная на F. Показать, что тогда меры ε_e, μ, μ^2, μ^3, ... попарно независимы (здесь $\mu^n = \mu * \mu^{n-1}$). (Показать, что если $m < n$, то множество элементов $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G^n$, таких, что $x_1 x_2 \ldots x_n \in F^m$, пренебрежимо относительно меры $\mu \otimes \mu \otimes \ldots \otimes \mu$.) Вывести, в предположении, что $\mu \geqslant 0$, равенство

$$\left\| \sum_{k=0}^{m} \alpha_k \mu^k \right\| = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \, \|\mu\|^k,$$

справедливое для любого набора комплексных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

g) Пусть $E \subset G$ — независимое компактное множество, $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — рассеянные неотрицательные меры единичной массы, сосредоточенные на непересекающихся частях $E_1, \ldots, E_r$ из E. Пусть, далее, $z_1, \ldots, z_r \in \mathbf{C}$ и $|z_i| \leqslant 1$ для всех i. Показать, что существует характер χ алгебры $\mathscr{M}^1(G)$, такой, что $\chi(\mu_i) = z_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. (Показать сначала, рассуждая так же, как в f), что если $(n_1, \ldots, n_r) \neq (m_1, \ldots, m_r)$, то меры $\mu_1^{m_1} * \ldots * \mu_r^{m_r}$ и $\mu_1^{n_1} * \ldots * \mu_r^{n_r}$ независимы. Затем, предполагая, что $|z_i| = 1$ для всех i, показать, что спектральный радиус элемента $\varepsilon_e + \bar{z}_1\mu_1 + \ldots + \bar{z}_r\mu_r$ равен $r+1$ и, стало быть, существует характер χ алгебры $\mathscr{M}^1(G)$, такой, что $\chi(\varepsilon_e + \bar{z}_1\mu_1 + \ldots + \bar{z}_r\mu_r) = r+1$; это и есть искомый характер для случая $|z_i| = 1$. В общем случае запнсать $z_i = \frac{1}{2}(z_i' + z_i'')$, где $|z_i'| =$

$= |z_i''| = 1$, и $\mu_i = \frac{1}{2}(\mu_i' + \mu_i'')$, так чтобы для мер μ_1', μ_1'', ..., μ_r', μ_r'' оставались справедливыми все те предположения, которые выполнялись для мер $\mu_1, \ldots, \mu_r$.) Обозначая через $\mathscr{M}_d(E)$ банахово пространство рассеянных мер, сосредоточенных на E, вывести отсюда, что каждая непрерывная линейная форма с нормой, не превосходящей 1 на $\mathscr{M}_d(E)$, продолжается до характера алгебры $\mathscr{M}^1(G)$.

15) Пусть $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, таких, что произведение любой производной функции f на любой многочлен ограничено. Тогда $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n) \subset L^1(\mathbf{R}^n)$ и преобразование Фурье $\mathscr{F} \mid \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$ является автоморфизмом множества $\mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$. Показать, что если $x_1, \ldots, x_n$ — координатные функции на $\mathbf{R}^n$ и если $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^n)$, то $(\partial/\partial x_j)(\mathscr{F}f) = -2i\pi\mathscr{F}(x_j f)$.

¶16) Пусть H — замкнутая подгруппа в G, g — элемент из $L^1(G)$, такой, что $\mathscr{F}g$ обращается в нуль на $H^\perp$, и пусть $\varepsilon > 0$. Показать, что существует мера $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$, сосредоточенная на H и такая, что $\|\mu\| \leqslant 2$, $\|g * \mu\| \leqslant \varepsilon$ и $\mathscr{F}\mu = 1$ в некоторой окрестности $H^\perp$.

§ 2

1) a) Для того чтобы группа G имела счетную базу, необходимо и достаточно, чтобы группа $\widehat{G}$ имела счетную базу. (Если G имеет счетную базу, то $L^1(G)$, а стало быть, $\mathfrak{X}(L^1(G))$ имеет счетную базу.)

b) Для того чтобы группа G была счетной на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы группа $\widehat{G}$ содержала открытую подгруппу со счетной базой или чтобы $\widehat{G}$ была метризуемой. (Воспользоваться предложением 3.)

c) Для того чтобы компактная группа G была метризуемой, необходимо и достаточно, чтобы группа $\widehat{G}$ была счетной или чтобы G была изоморфна некоторой замкнутой подгруппе в $\mathbf{T}^{\mathbf{N}}$. (Счетная дискретная группа является факторгруппой группы $\mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$.)

2) a) Каждая бесконечная коммутативная группа Γ допускает некоторую счетную бесконечную факторгруппу. (Вложить счетную бесконечную подгруппу $\Delta \subset \Gamma$ в некоторую счетную делимую группу Δ' и применить *Алг.*, гл. II, 3-е изд., § 2, упр. 14; затем продолжить на Γ тождественный морфизм из Δ в Δ'.)

b) Каждая бесконечная компактная коммутативная группа содержит метризуемую бесконечную замкнутую подгруппу. (Применить a).)

3) a) Пусть K — компактная группа, E_n — множество ее элементов порядка n. Показать, что если $K \neq E_n$ при любом n, то множество элементов из K бесконечного порядка плотно в K. (Если E_n имеет непустую внутренность, то $E_m = K$ для некоторого целого $m \geqslant n$.)

b) Пусть Γ — коммутативная дискретная группа, порядки элементов которой не ограничены. Показать, что тогда Γ допускает счетную факторгруппу, обладающую тем же свойством. (Привлечь те же соображения, что и при решении упр. 2 a).)

c) Показать, что если каждая окрестность элемента e в G содержит элемент бесконечного порядка, то G содержит метризуемую замкнутую подгруппу, обладающую тем же свойством. (Свести общий случай к случаю, когда G — компактная группа, и применить a) и b).) В противном случае и если группа G не дискретна, то существует целое число $q > 1$, такое, что группа G содержит замкнутую подгруппу, изоморфную группе $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$. (Применить *Алг.*, гл. VII, § 2, упр. 4 c).)

4) Показать, что если группа G компактна, а $\widehat{G}$ содержит элемент бесконечного порядка, то существует нетривиальный непрерывный мор-

физм из $\mathbf{R}$ в G. (Поскольку $\mathbf{R}$ — делимая группа, существует нетривиальный морфизм из $\widehat{G}$ в $\mathbf{R}$.)

5) Пусть p — простое число. Показать, что группа $\mathbf{Q}_p$ не представляется в виде произведения компактной и дискретной групп. (Всякая компактная подгруппа в $\mathbf{Q}_p$ имеет вид $p^n\mathbf{Z}_p$ с некоторым $n \in \mathbf{Z}$.)

6) Показать, что если G — группа, состоящая из элементов конечного порядка, то G и $\widehat{G}$ вполне несвязны. (Группа $\widehat{G}$ вполне несвязна в силу следствия 2 предложения 4. Доказательство того, что группа G вполне несвязна, свести с помощью предложения 3 к случаю, когда G компактна. Показать затем, что все элементы $\widehat{G}$ имеют конечный порядок.)

7) Элемент $x \in G$ будем называть элементом бесконечной высоты, если для любого $n \in \mathbf{Z}$ существует элемент $y \in G$, такой, что $y^n = x$. Показать, что если G компактна, то множество элементов бесконечной высоты является связной компонентой единицы группы G.

¶8) Показать, что следующие условия эквивалентны: α) G — локально связная группа; β) G изоморфна группе $\mathbf{R}^n \times E \times \widehat{D}$, где E и D дискретны и каждая подгруппа конечного ранга в D свободна.

9) a) Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ — некоторая последовательность целых чисел > 1. Снабдим группу $\mathbf{Z}$ структурой топологического кольца, для которой множества $\mathbf{Z}a_0a_1 \ldots a_n$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Обозначим через $\Delta_\mathbf{a}$ пополнение этого кольца. Показать, что $\Delta_\mathbf{a}$ — вполне несвязный метризуемый компакт. Показать далее, что если p — простое число и $a_i = p$ при всех i, то $\Delta_\mathbf{a} = \mathbf{Z}_p$.

b) Обозначим через $\mathbf{Z}(\mathbf{a}^\infty)$ мультипликативную группу комплексных чисел вида $\exp(2i\pi l/(a_0a_1 \ldots a_r))$ $(l \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{N})$, снабженную дискретной топологией. Показать, что отображение $\chi \longmapsto \chi(1)$ является изоморфизмом из $(\Delta_\mathbf{a})^\wedge$ на $\mathbf{Z}(\mathbf{a}^\infty)$.

c) Пусть B — подгруппа в $\mathbf{R} \times \Delta_\mathbf{a}$, состоящая из элементов вида (n, n), где $n \in \mathbf{Z}$; она дискретна. Положим $\Sigma_\mathbf{a} = (\mathbf{R} \times \Delta_\mathbf{a})/B$. Показать, что $\Sigma_\mathbf{a}$ — связная метризуемая компактная группа. (Заметить, что канонический образ $\mathbf{R}$ в $\Sigma_\mathbf{a}$ плотен, и воспользоваться леммой 1.)

d) Пусть $\Gamma_\mathbf{a}$ — аддитивная подгруппа дискретной группы $\mathbf{Q}$, состоящая из всех рациональных чисел вида $l/(a_0a_1 \ldots a_r)$ $(l \in \mathbf{Z}, r \in \mathbf{N})$. Если $\chi \in (\Sigma_\mathbf{a})^\wedge$, то χ определяет унитарный характер группы $\mathbf{R} \times \Delta_\mathbf{a}$ и, стало быть, унитарный характер на $\mathbf{R}$, имеющий вид $x \longmapsto \exp(2i\pi\alpha_\chi x)$, где $\alpha_\chi \in \mathbf{R}$. Показать, что отображение $\chi \longmapsto \alpha_\chi$ является изоморфизмом группы $(\Sigma_\mathbf{a})^\wedge$ на $\Gamma_\mathbf{a}$.

e) Показать, что группа $\widehat{\mathbf{Q}}$ канонически изоморфна группе $\Sigma_\mathbf{a}$ при $\mathbf{a} = (2, 3, 4, 5, \ldots)$.

f) Пусть $\mathbf{R}_d$ — группа $\mathbf{R}$, снабженная дискретной топологией. Показать, что $(\mathbf{R}_d)^\wedge$ изоморфна группе $(\Sigma_\mathbf{a})^c$, где $\mathbf{a} = (2, 3, 4, 5, \ldots)$, c — мощность континуума. (Рассмотреть базис $\mathbf{R}$ над $\mathbf{Q}$.)

¶10) Топологическая группа называется *монотетической*, если существует элемент этой группы, степени которого плотны в ней, и *соленоидальной*, если существует непрерывный морфизм из $\mathbf{R}$ в эту группу, образ которого плотен.

a) Показать, что $\Delta_\mathbf{a}$ (сохраняются обозначения упражнения 9) — монотетическая группа и что каждая вполне несвязная монотетическая компактная группа топологически изоморфна группе $\Delta_\mathbf{a}$ при некотором $\mathbf{a}$.

b) Предположим, что G компактна. Показать, что для того, чтобы группа G была монотетической, необходимо и достаточно, чтобы группа $\widehat{G}$

была изоморфна некоторой подгруппе в $\mathbf{T}$, снабженной дискретной топологией.

c) Предположим, что G компактна. Показать, что следующие условия эквивалентны: α) группа G соленоидальна; β) группа $\widehat{G}$ изоморфна некоторой подгруппе в $\mathbf{R}$, снабженной дискретной топологией; γ) $\widehat{G}$ — группа без кручения и $\operatorname{Card}\widehat{G} \leqslant \mathfrak{c}$ (мощность континуума); δ) G — факторгруппа группы $(\Sigma_{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{c}}$, где $\mathfrak{a} = (2, 3, 4, 5, \ldots)$.

d) Показать, что если G — компактная соленоидальная группа, то G — монотетическая группа.

11) Обозначим через $L(G)$ множество непрерывных представлений группы G в $\mathbf{R}$. Назовем *однопараметрической подгруппой* в G образ непрерывного морфизма из $\mathbf{R}$ в G.

a) Показать, что следующие условия эквивалентны: α) G представляется в виде объединения однопараметрических подгрупп; β) каждый морфизм из $\mathbf{Z}$ в G продолжается до непрерывного морфизма из $\mathbf{R}$ в G; γ) каждый непрерывный морфизм из $\widehat{G}$ в $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ порождается путем перехода к факторгруппе некоторым элементом из $L(\widehat{G})$; δ) каждый унитарный характер группы $\widehat{G}$ имеет вид $e^{i\lambda}$, где $\lambda \in L(\widehat{G})$.

b) Если группа G имеет счетную базу, то условия, перечисленные в a), эквивалентны следующему: ε) $G = \mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$, где I — счетное множество.

c) Объединение одиопараметрических подгрупп в G являетси плотной подгруппой в связной компоненте единицы группы G. (Применить упр. 4.)

d) Если $t \longmapsto \chi_t$ — непрерывное отображение интервала $(0, 1)$ в $\widehat{G}$, такое, что $\chi_0 = e$, то существует отображение $t \longmapsto \lambda_t$ из $(0, 1)$ в $L(G)$, такое, что α) $\lambda_t(x)$ для каждого элемента $x \in G$ непрерывно зависит от t; β) $\chi_t = \exp(2i\pi\lambda_t)$; γ) $\lambda_0 = 0$.

e) Объединение однопараметрических подгрупп в G является также объединением дуг из G, содержащих e (*дуга* из G определяется как образ непрерывного отображения из $(0, 1)$ в G). (Применить d).)

12) Сохраним обозначение $L(G)$ из упражнения 11.

a) Пусть H — замкнутая подгруппа в G. Показать, что каждый элемент из $L(H)$ продолжается до элемента из $L(G)$. (Свести эту задачу сначала к случаю, когда $G = \mathbf{R}^n \times D$, где D — дискретная группа, затем к случаю, когда исходный элемент из $L(H)$ тривиален на $\mathbf{R}^n$, и, наконец, к случаю, когда группа G дискретна. Воспользоваться тем, что группа $\mathbf{R}$ делима.)

b) Показать, что каждый непрерывный морфизм из H в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$ (I — произвольное множество) продолжается до непрерывного морфизма из G в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$. (Применить a) и теорему 4 § 1.)

c) Обратно, пусть A — локально компактная коммутативная группа. Допустим, что для любой локально компактной коммутативной группы G и любой замкнутой подгруппы H в G каждый непрерывный морфизм φ из H в A продолжается до непрерывного морфизма из G в A. Показать, что тогда существуют такие число n и множество I, что группа A изоморфна $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^I$. (Полагая $G = \mathbf{R}$ и $H = \mathbf{Z}$, показать, что группа A связна и, следовательно, представляется в виде $\mathbf{R}^n \times \widehat{D}$, где D — дискретная группа. Показать, что D — проективный и, стало быть, свободный $\mathbf{Z}$-модуль.)

13) Пусть C — компактная часть G и $\varepsilon > 0$.

a) Пусть α — мера Хаара на G. Показать, что существует компактная часть D в G, такая, что $\alpha(CD) \leqslant (1 + \varepsilon)\alpha(D)$. (Случай, когда $G = \mathbf{R}^n$, тривиален; задачу можно свести к случаю, когда G содержит компактную открытую подгруппу H, такую, что C является насыщенной по H;

поэтому можно ограничиться случаем дискретной группы G; затем можно предположить, что G — группа конечного типа и, наконец, что $G = \mathbf{Z}^p$.)

b) Показать, что существует функция $k \in L^1(\widehat{G})$, такая, что $\mathscr{F}k \in \mathscr{K}(G)$, $(\mathscr{F}k)(x) = 1$ для $x \in C$ и $\|k_1\| \leqslant 1 + \varepsilon$. (Выбрать функцию k в виде λfg, где λ — постоянная, а преобразования Фурье фуикций f, $g \in L^2(\widehat{G})$ являются характеристическими функциями надлежащим образом выбранных множеств, и применить а).)

¶14) а) Предположим, что каждая окрестность элемента e в G содержит элемент бесконечного порядка. Показать, что существуют вполне несвязная совершенная метрическая компактная часть P в G, являющаяся множеством Кронекера, и ненулевая рассеянная мера, сосредоточенная на P. (Свести задачу к случаю, когда группа G метризуема, и применить упр. 3 с). Воспроизвести далее конструкцию из *Общ. топ.*, гл. IX, 2-е изд., § 6, лемма 3, и, кроме того, воспользоваться упр. 14 е) к § 1.)

b) Показать, что если $G = (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, то существуют вполне несвязная совершенная компактная часть P в G типа K_q и ненулевая рассеянная мера, сосредоточенная на P.

c) Предположим, что группа G не дискретна. Показать, что существуют: α) элемент τ из $\mathscr{M}^1(G)$, такой, что $\sup|\mathscr{F}\tau|$ строго мажорируется спектральным радиусом элемента τ; β) необратимый элемент τ' из $\mathscr{M}^1(G)$, такой, что $\mathscr{F}\tau' \geqslant 1$ всюду на $\widehat{G}$; γ) не эрмитов характер на $\mathscr{M}^1(G)$. (Использовать а), b), упр. 3 с) и упр. 14 f) к § 1.)

d) Вывести из с), что группа $\widehat{G}$, открытая в $X(\mathscr{M}^1(G))$, не плотна в $X(\mathscr{M}^1(G))$.

§ 3

1) Пусть F — замкнутая часть в $\widehat{G}$ и K — компактная часть в $\widehat{G}$, такие, что $F \cap K = \varnothing$. Показать, что существует непрерывная функция $g \in L^1(G)$, такая, что $\mathscr{F}g$ равно 0 на F и 1 на K. (Рассмотреть свертку функции f из n° 1, замечание 1, с преобразованием Фурье некоторой функции вида $h * h'$, где h, $h' \in \mathscr{K}(\widehat{G})$, и $h * h' = 1$ на K.)

2) Пусть g — комплекснаи функция, определенная на $]0, +\infty[$, интегрируемая по мере Лебега. Предположим, что $\int_0^\infty g(t)\,dt = 1$ и что $\int_0^\infty g(t)\,t^{ix}\,dt \neq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Пусть f — измеримая и ограниченная комплексная функция на $]0, +\infty[$, такая, что $\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt$ стремится к конечному пределу l, когда x стремится к $+\infty$.

а) Показать, что для каждой комплексной фуикции h, определеиной на $]0, +\infty[$, интегрируемой по мере Лебега и имеющей равный 1 интеграл,

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} h\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt$$

стремится к l, когда x стремится $+\infty$. В частности,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

стремится к l при $x \to +\infty$. (Полагая $g_1(t) = tg(t)$, $h_1(t) = th(t)$, убедиться в том, что $g_1 \in L^1(\mathbf{R}_+^*)$; $\mathscr{F}g_1$ нигде не обращается в нуль и $\check{g}_1 * f$ стремится к l, стало быть, $h_1 * f$ стремится к l.)

b) Показать, что если функция $f(t)$ является слабо осциллирующей на $\mathbf{R}_+^*$, когда t стремится к $+\infty$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l$.

3) Пусть $f \in L^\infty((0, \infty()$ и $k \in \mathbf{R}_+^*$. Показать, что если

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t/x} f(t)\,dt$$

стремится к l при $x \to +\infty$, то

$$\frac{k}{x^k}\int_0^x (x-t)^{k-1} f(t)\,dt$$

стремится к l при $x \to +\infty$. (Рассмотреть функции $g(t) = e^{-t}$ и $h(t) = k(1-t)^{k-1}$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $h(t) = 0$ для $t > 1$.)

4) Пусть f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и g: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ — две функции. Допустим, что $f \in L^\infty(\mathbf{R})$, $g \in L^1(\mathbf{R})$, интеграл g равен 1 и $\mathscr{F}g$ нигде не обращается в нуль. Предположим, далее, что f — медленно убывающая функция, т. е.

$$\liminf (f(y) - f(x)) \geqslant 0$$

при $x \to +\infty$, $y > x$ и $y - x \to 0$. Показать, что если $(g * f)(x)$ стремится к l при $x \to +\infty$, то $f(x) \to l$ при $x \to +\infty$.

5) Пусть g: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ — непрерывнаи функция, такая, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{n \leqslant t \leqslant n+1} |g(t)| < +\infty.$$

Ясно, что $g \in L^1(\mathbf{R})$. Предположим, что $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = 1$ и $\mathscr{F}g$ нигде не обращается в нуль. Пусть, далее, μ — комплексная мера на $\mathbf{R}$, такая, что $|\mu|((x, x+1))$ остается ограниченной, когда x пробегает $\mathbf{R}$. Показать, что если $(g * \mu)(x)$ стремится к l при $x \to +\infty$, то для любой непрерывной функции h: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, такой, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{n \leqslant t \leqslant n+1} |h(t)| < +\infty$$

и интеграл h равен 1, $(h * \mu)(x)$ стремится к l, когда x стремится к $+\infty$. (Показать, что функция $h * \mu$ является слабо осциллирующей и что $(g * (h * \mu))(x)$ стремится к l, когда x стремится к $+\infty$.)

6) Пусть g — некоторая функция, для которой выполняются предположения упражнения 2. Предположим дополнительно, что $g \geqslant 0$ и

$\liminf_{x\to 0} g(x) > 0$. Пусть, далее, f — измеримая вещественная ограниченная снизу функция на интервале $]0, +\infty[$. Показать, что если интеграл

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g\left(\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt$$

стремится к l, когда x стремится к $+\infty$, то

$$\sigma(x) = \frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)\,dt$$

стремится к l, когда x стремится к $+\infty$. (Показать, что функция σ ограничена при $x \geqslant 1$, затем, что σ — медленно убывающая функция и, наконец, что

$$\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g\left(\frac{t}{x}\right) \sigma(t)\,dt$$

стремится к l, когда x стремится к $+\infty$.)

¶7) a) На последовательности $\{1, 2, 3, \ldots\}$ определяется так называемая *функция Мёбиуса* μ следующим образом: $\mu(n) = (-1)^k$, если n разлагается в произведение k простых попарно различных множителей (в частности, $\mu(1) = 1$), и $\mu(n) = 0$ в противном случае. Для $x > 0$ положим $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)$ и $f(x) = x^{-1} M(x)$. Показать, что тогда функция f ограничена и $f(y) - f(x) = O((y-x)/x)$, так что f — слабо осциллирующая функция на группе $\mathbf{R}_+^*$.

b) Для $x > 0$ пусть $[x]$ — целая часть x. Положим $g_0(t) = [t^{-1}]$ и $g(t) = 2g_0(t) - ag_0(at) - bg_0(bt)$ $(a, b \in \mathbf{R}_+^*)$. Тогда $g(t)$ — ограниченная функция в окрестности точки 0, равная нулю для достаточно больших t; стало быть, g — интегрируемая по мере Лебега функция на интервале $]0, +\infty[$. Показать, что если $s \in \mathbf{C}$ и $\mathcal{R}s > 0$, то

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, t^s\, dt = (2 - a^{-s} - b^{-s})\,\frac{\zeta(1+s)}{1+s},$$

где $\zeta(1+s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+s)}$. Допуская, что

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

продолжается на всю комплексную плоскость как целая функция и что функция $\zeta(s)$ также продолжается, нигде не обращаясь в нуль на прямой $\mathcal{R}s = 1$ [1]), вывести, что

$$\int_0^{+\infty} g(t)\, t^{ix}\, dt \neq 0$$

---

[1]) См., например, Valiron G., Théorie des fonctions, t. I, Paris, 1942, pp. 505—510.

для всех $x \in \mathbf{R}$.

c) Показать, что $\int_0^{+\infty} g(t/x) f(t)\, dt = o(x)$, когда $x \to +\infty$. Вывести, что $M(x) = o(x)$, когда $x \to +\infty$.

8) Пусть φ: $(0, +\infty[\to \mathbf{R}$ — монотонно возрастающая неотрицательная функция, такая, что функция $t \mapsto e^{-\sigma t}\varphi(t)$ интегрируема по мере Лебега, когда $\sigma > 1$. Для каждого числа $s \in \mathbf{C}$, такого, что $\mathscr{R}s > 1$; положим $f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\varphi(t)\, dt$. Предположим, что существует число $A \in \mathbf{C}$, обладающее следующим свойством: когда σ стремится к 1, оставаясь > 1, функция

$$\tau \mapsto f(\sigma + i\tau) - \frac{A}{\sigma + i\tau - 1} \qquad (\tau \in \mathbf{R})$$

равномерно стремится на каждой компактной части $\mathbf{R}$ к некоторой функции g. Показать, что тогда

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t)\, e^{-t} = A.$$

(Положим $a(t) = e^{-t}\varphi(t)$ для $t > 0$, $a(t) = 0$ для $t \leqslant 0$, $A(t) = A$ для $t > 0$, $A(t) = 0$ для $t \leqslant 0$. Пусть $\lambda > 0$. Положим, далее,

$$k_\lambda(t) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin 2\lambda t}{2\lambda t}\right)^2,$$

$$K_\lambda(t) = \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{t}{2\lambda}\right|, & \text{если} \quad |t| \leqslant 2\lambda, \\ 0, & \text{если} \quad |t| > 2\lambda. \end{cases}$$

Используя упр. 1 к § 1, теорему Лебега — Фубини и теорему Планшереля, показать, что

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_\lambda(x - t)(a(t) - A(t))\, e^{-\varepsilon t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} K_\lambda(y)\, e^{-ixy} g(y)\, dy,$$

и вывести равенство

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k_\lambda(x - t)\, a(t)\, dt = A.$$

Доказать затем, что a — ограниченная и медленно убывающая функция. Наконец, применить упр. 4 или получить результат непосредственно.)

9) Пусть $\mathfrak{J}$ — множество всех $f \in \mathscr{D}(\mathbf{R}^3)$ (§ 1, упр. 15), таких, что $\mathscr{F}f$ аннулирует сферу $\mathbf{S}_2$. Пусть, далее $\mathfrak{J}$ — множество всех $f \in \mathfrak{J}$, таких, что $(\partial/\partial y_1)(\mathscr{F}f)$ аннулирует $\mathbf{S}_2$. Пусть, наконец, $\overline{\mathfrak{J}}, \overline{\mathfrak{J}}$ — замыкания $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}$ в $L^1(\mathbf{R}^3)$. Показать, что тогда $h(\overline{\mathfrak{J}}) = h(\overline{\mathfrak{J}}) = \mathbf{S}_2$, но $\overline{\mathfrak{J}} \neq \overline{\mathfrak{J}}$. (Пусть μ — положительная мера единичной массы на $\mathbf{S}_2$, инвариантная относительно

ортогональной группы в $\mathbf{R}^3$. Показать, что $(\mathscr{F}\mu)(y_1, y_2, y_3) = (\sin 2\pi r)/2\pi r$, где $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$. Вывести отсюда, что функция f на $\mathbf{R}^3$, определенная равенством

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1 (\mathscr{F}\mu)(y_1, y_2, y_3),$$

является элементом из $L^\infty(\mathbf{R}^3)$, ортогональным к $\mathfrak{I}$, но не ортогональным к $\mathfrak{J}$.)

10) Назовем *C-множеством* в $\hat{G}$ замкнутую часть E в $\hat{G}$, обладающую следующими свойствами: если $f \in L^1(G)$ и $\mathscr{F}f$ аннулирует E, то для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in L^1(G)$, такая, что $\|f - f * g\| < \varepsilon$ и $\operatorname{supp}(\mathscr{F}g)$ — компактное множество, не пересекающееся с E. Показать, что

a) Если E есть C-множество в $\hat{G}$, то существует единственный замкнутый идеал $\mathfrak{I}$ в $L^1(G)$, для которого $h(\mathfrak{I}) = E$.

b) Любая точка из $\hat{G}$ является C-множеством.

c) Объединение двух C-множеств есть C-множество.

d) Любое множество, получеиное сдвигом C-множества, само является C-множеством.

e) Если H — замкнутая подгруппа в $\hat{G}$, E — замкнутая часть в H, такая, что ее граница E' относительно H является C-множеством относительно $\hat{G}$, то E является C-множеством относительно $\hat{G}$. (Использовать упр. 16 к § 1.)

f) Пересечение E в $\mathbf{R}^n$ конечного числа замкнутых полупространств есть C-миожество. (Провести индукцию по размерности аффиниого подпространства, порожденного E, и применить b), c), d), e).)

11) Пусть E — замкнутая часть в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что существует внутренняя точка p множества E, такая, что любая прямая, проходящая через p, пересекает границу множества E не более чем в двух точках. Показать, что тогда существует единственный замкнутый идеал $\mathfrak{I}$ в $L^1(\mathbf{R}^n)$, такой, что $\mathscr{F}f$ аннулирует E. (Представить функцию f как предел в $L^1(\mathbf{R}^n)$ функций, полученных нз f с помощью гомотетий с центром в точке p.)

¶ 12) Обозначим через α меру Хаара группы G, а через $\mathfrak{B}$ — фильтр окрестностей элемента e в $\hat{G}$.

a) Пусть U — интегрируемая открытая окрестность элемента e в G. Показать, что существует неотрицательная функция $a \in L^1(G)$ с интегралом, равным 1, обращающаяся в иуль вне U, такая, что $\mathscr{F}a \in L^1(\hat{G})$ и $\int_{\hat{G}} a(x)^2\, dx \leqslant 2/\alpha(U)$. (Пусть V — компактная окрестность элемента e, такая, что $V \subset U$, $\alpha(U) < \sqrt{2}\,\alpha(V)$; пусть, далее, W — симметричная компактнаи окрестность элемента e, такая, что $VW^2 \subset U$; функции a ищется н виде $a = \lambda f * g$, где λ — положнтельная постоянная, а f, g — характеристические функции окрестностей VW и W.)

b) Пусть $f \in L^\infty(G)$. Обозиачим через $A(f)$ множество элементов из $\hat{G}$, принадлежащих слабо замкнутому инвариантному относительно сдвигов подпространству в $L^\infty(G)$, порожденному функцией f. Показать, что если f, $g \in L^\infty(G)$, то

$$A(fg) \subset \overline{A(f)\, A(g)}.$$

(Пусть U — какая-иибудь окрестность элемента e. Показать, что функция fg является слабым пределом линейных комбинацнй элементов нз $\hat{G}$, принадлежащих множеству $A(f)\, UA(g)\, U$.)

c) Пусть $g \in L^\infty(G)$, K — компактная часть $\hat{G}$, f — функция из $L^1(G)$, такая, что $\mathscr{F}f$ обращается в нуль на $A = A(g)$ и вне K. Для каждой окрестности $V \in \mathfrak{V}$ пусть $\omega(V)$ — верхняя грань множества значений $|\mathscr{F}f|$ на AV. Показать, что если

$$\liminf_{\mathfrak{V}} \omega(V)^2 \alpha(V)^{-1} \alpha((AV - A) \cap K) = 0,$$

то $\langle f, g \rangle = 0$. (Пусть $\varepsilon > 0$. Существует компактная часть H в G, такая, что $\int\limits_{G-H} |f|\,dx \leqslant \varepsilon$. Далее, существует открытая окрестность U элемента e в $\hat{G}$, такая, что $|\langle x, \hat{x}\rangle - 1| \leqslant \varepsilon$ при $x \in H$, $\hat{x} \in U$. Применяя a) к $\hat{G}$ и U, получим функцию $a \in L^1(\hat{G})$. Пусть $b = \mathscr{F}a \in L^1(G)$. Используя b), показать, что $\mathscr{F}(bg)$ обращается в нуль вне AU. С другой стороны,

$$\left|\int fg\,dx - \int fgb\,dx\right| \leqslant \varepsilon(\|f\|_1 + 2)\|g\|_\infty,$$

и поскольку f, $gb \in L^2(G)$, имеем

$$\left|\int fgb\,dx\right| = \left|\int (\mathscr{F}f)(\mathscr{F}(gb))\,d\hat{x}\right| = \left|\int\limits_{(AU-A)\cap K} (\mathscr{F}f)(\mathscr{F}(gb))\,d\hat{x}\right|.$$

Правая часть последнего равенства мажорируется выражением

$$2\|g\|_\infty \alpha(U)^{-1/2} \omega(U) \alpha((AU - A) \cap K)^{1/2}).$$

d) Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(G)$, $A = h(\mathfrak{J})$, f — функция из $L^1(G)$, такая, что $\mathscr{F}f$ аннулирует A, S — множество всех точек, в которых обращается в нуль $\mathscr{F}f$, S' — граница S, B — максимальное совершенное множество, содержащееся в $S' \cap A$. Для $V \in \mathfrak{V}$ пусть $\omega(V)$ — верхняя грань множества значений $|\mathscr{F}f|$ в AV. Предположим, наконец, что каждая точка из B обладает окрестностью K в $\hat{G}$, такой, что

$$\liminf_{\mathfrak{V}} \omega(V)^2 \alpha(V)^{-1} \alpha((AV - A) \cap K) = 0.$$

Показать, что тогда $f \in \mathfrak{J}$. (Воспользоваться тем, что алгебра $L^1(G)$ удовлетворяет условию Дниккина, и рассуждать так же, как в предл. 5, § 1, гл. I. Пусть $\hat{G} \cup \{\infty\}$ — компактификация Александрова пространства $\hat{G}$, и пусть N — множество всех характеров $\chi \in \hat{G} \cup \{\infty\}$, таких, что $\mathscr{F}f$ не принадлежит $\mathscr{F}\mathfrak{J}$ в окрестности точки χ. Показать сначала, что $N \subset B \cup \{\infty\}$. Затем, используя c), показать, что $N \subset \{\infty\}$. Наконец, показать, что $N = \varnothing$.)

e) Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(\mathbf{R}^n)$, $A = h(\mathfrak{J})$, f — функция из $L^1(\mathbf{R}^n)$, такая, что $\mathscr{F}f$ обращается в нуль на A. Для $h > 0$ обозначим через A_h множество всех точек из $\mathbf{R}^n$, внешних по отношению к A и расположенных от A на расстоянии, не превосходящем h. Положим $\omega(h) = \sup\limits_{x \in A_h} |(\mathscr{F}f)(x)|$. Показать, что если $\liminf\limits_{h \to 0} \omega(h)^2 h^{-n} \alpha(A_h) = 0$, то $f \in \mathfrak{J}$. (Применить d).)

f) Пусть $f \in L^1(\mathbf{R})$, $\alpha \in]0, 1[$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^\alpha |f(y)|\,dy < +\infty$. Показать, что тогда существует постоянная k, такая, что $|(\mathscr{F}f)(x+h) - (\mathscr{F}f)(x)| \leqslant$

$\leqslant kh^{\alpha}$. (Показать, что для любого наперед заданного числа $N>0$ имеет место неравенство

$$|(\mathcal{F}f)(x+h)-(\mathcal{F}f)(x)|\leqslant 2\pi h\int\limits_{-N}^{N}|yf(y)|\,dy+2\int\limits_{|y|\geqslant N}|f(y)|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi hN^{1-\alpha}\int\limits_{-N}^{N}|y^{\alpha}f(y)|\,dy+2N^{-\alpha}\int\limits_{|y|\geqslant N}|y^{\alpha}f(y)|\,dy,$$

и затем выбрать $N=|h|^{-1}$.)

g) Пусть $\mathfrak{J}$ — замкнутый идеал в $L^1(\mathbf{R})$, f — функция из $L^1(\mathbf{R})$, такая, что $\mathcal{F}f$ обращается в нуль на $h(\mathfrak{J})$. Показать, что если $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y^{1/2}f(y)|\,dy<+\infty$, то $f\in\mathfrak{J}$. (Применить e) и f).)

Цифры после определяемого символа означают соответственно номер главы, параграфа и пункта (или упражнения).

$\tilde{A}$ (A — алгебра над коммутативным полем): I, 1, 1.
$\mathrm{Sp}_A x$, $\mathrm{Sp}\, x$ (x—элемент алгебры A с единицей): I, 1, 2.
$R(x, \lambda)$ (x — элемент алгебры с единицей): I, 1, 2.
$\mathrm{Sp}'_A x$, $\mathrm{Sp}' x$ (x — элемент некоторой алгебры A): I, 1, 3.
$\mathrm{X}(A)$, $\mathrm{X}(h)$ (A — коммутативная алгебра с единицей, h — морфизм коммутативных алгебр с единицей): I, 1, 5.
$\mathcal{G}_A(x)$, $\mathcal{G}(x)$ (x — элемент коммутативной алгебры с единицей): I, 1, 5.
$\mathrm{X}'(A)$, $\mathrm{X}'(h)$, $\mathrm{X}(A)$ (A — коммутативная алгебра, h — морфизм коммутативных алгебр): I, 1, 6.
$\mathcal{G}'_A(x)$, $\mathcal{G}'(x)$, $\mathcal{G}_A(x)$, $\mathcal{G}(x)$ (x — элемент коммутативной алгебры A): I, 1, 6.
$J(A)$ (A — алгебра): I, 1, 7.
$V(M)$ (M — часть некоторой алгебры): I, 1, 7.
$\mathfrak{k}(T)$ (T — часть $J(A)$): I, 1, 7.
$\hat{A}$ (A — алгебра): I, 1, 7.
L_x, R_x (x — элемент нормированной алгебры): I, 2, 1.
$\rho(x)$ (x — элемент нормированной алгебры): I, 2, 3.
$\mathcal{O}(U; E)$, $\mathcal{O}(K; E)$, $\mathcal{O}(U)$, $\mathcal{O}(K)$ (U — открытое подмножество пространства $\mathbf{C}^n$, K — компакт в $\mathbf{C}^n$, E — комплексное банахово пространство): I, 4, 1.
$A^{(\infty)}$ (A—банахова алгебра с единицей, коммутативная): I, 4, 1.
$\Theta_{\mathbf{a}}$ ($\mathbf{a}$ — элемент из $A^{(\infty)}$): I, 4, 1.
$\tilde{f}(\mathbf{a})$ ($\mathbf{a}$ — элемент из A^n, $\tilde{f}$ — элемент из $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}\,\mathbf{a}; A)$): I, 4, 4.
$\tilde{f}(x)$ (x — элемент банаховой, не обязательно коммутативной, алгебры, f — элемент из $\mathcal{O}(\mathrm{Sp}_A x)$): I, 4, 1.
$\exp x$, $\log x$ (x — элемент банаховой алгебры с единицей): I, 4, 9.
$R_H(\lambda, x)$ (H — открыто-замкнутое подмножество в $\mathrm{Sp}\, x$): I, 4, 11.
$h(\mathfrak{I})$ ($\mathfrak{I}$ — идеал коммутативной банаховой алгебры): I, 5, 1.
$\mathfrak{k}(M)$ (M — часть в $\mathrm{X}(A)$, где A — коммутативная банахова алгебра): I, 5, 2.

x^*, f^* (x — элемент инволютивной алгебры, f — линейная форма на инволютивной алгебре): I, 6, 1.
μ^*, $f^*(\mu \in \mathscr{M}^1(G)$, $f \in L^1(G))$: I, 6, 1.
$f(x)$ (x — нормальный элемент C^*-алгебры A, f — элемент из $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A x)$): I, 6, 5.
x^+, x^-, $|x|$, $\mathrm{abs}(x)$, x^α (x — эрмитов элемент C^*-алгебры): I, 6, 5.
$\mathrm{St}(A)$ (A — инволютивная банахова алгебра): I, 6, 6.
$|z|$, $\mathrm{abs}(z)$ (E, F — комплексные гильбертовы пространства, $z \in \mathscr{L}(E; F)$): I, 6, 8.
$\mathrm{St}(G)$ (G — локально компактная группа): I, 6, 7.
$\|x\|_*$ (x — элемент инволютивной алгебры): I, 6, 6.
$H^p(\mu)$ (μ — положительная мера на компактном пространстве, $1 \leqslant p < +\infty$); I, 7, упр. 8.
$\hat{G}$ (G — локально компактная коммутативная группа): II, 1, 1.
$\langle \hat{x}, x \rangle$ ($x \in G$, $\hat{x} \in \hat{G}$): II, 1, 1.
$A^\perp$ (A — часть в G или в $\hat{G}$): II, 1, 1.
$\mathscr{F}\mu$, $\bar{\mathscr{F}}\mu$, $\hat{\mu}$ (μ — ограниченная мера на G): II, 1, 2.
$\mathscr{F}f$, $\bar{\mathscr{F}}f$ ($f \in \mathscr{L}^1(G)$): II, 1, 2.
$\hat{\varphi}$ (φ — морфизм локально компактной коммутативной группы): II, 1, 7.
$\mathscr{H}_m$ (функции Эрмита): II, 1, упр. 2.
$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$: II, 1, упр. 15.
μ (функция Мёбиуса): II, 3, упр. 7.

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Цифры после определяемого термина означают соответственно номер главы, параграфа и пункта (или упражнения).

Алгебра инволютивная: I, 6, 1.
— нормированная (комплексная): I, 2, 1.
— — инволютивная: I, 6, 2.
— полученная присоединением единицы: I, 1, 1.
— с единицей: I, 1, 1.
— — — нормированная: I, 2, 1.
— — — — полученная присоединением единицы: I, 2, 1.
C^*-алгебра: I, 6, 3.
— локально компактной группы: I, 6, 7.
— обертывающая инволютивную банахову алгебру: I, 6, 6.
— полученная присоединением единицы: I, 6, 3.
Аннулятор части локально компактной коммутативной группы: II, 1, 1.

Банахова алгебра: I, 2, 1.
— — инволютивная: I, 6, 2.
— — коммутативная регулярная: I, 5, 1.

Гельфанда преобразование: I, 2, 5 и I, 2, 6.
Гельфанда — Мазура теорема: I, 2, 5.
Группа, двойственная к локально компактной коммутативной группе: II, 1, 1.
— монотетическая: II, 2, упр. 10.
— соленоидальная: II, 2, упр. 10.

Двойственный морфизм локально компактной коммутативной группы: II, 1, 1.
Делимая группа: II, 1, 7.
Делитель нуля топологический: I, 2, 4.
Джекобсона топология: I, 1, 7.
Дяткина условие: I, 5, 2.
Дуга: II, 2, упр. 11.

Значение абсолютное элемента из $\mathscr{L}(E; F)$ (E, F — комплексные гильбертовы пространства): I, 6, 8.
— ростка голоморфной функции: I, 4, 1.

Идеал примитивный: I, 1, 7.
Инволютивная нормированная алгебра: I, 6, 2.
— подалгебра: I, 6, 1.
Инволюция: I, 6, 1.

Квазинильпотентный элемент: I, 2, 3.
Копреобразование Фурье: II, 1, 2.

Локально m-выпуклая алгебра: I, 2, упр. 31.

Множества Кронекера: II, 1, упр. 14.
— независимые: II, 1, упр. 14.
Морфизм алгебр с единицей: I, 1, 1.
— инволютивных алгебр: I, 6, 1.

Наполненная подалгебра алгебры с единицей: I, 1, 4.
Неприводимое представление: I, 1, 7.
Нормальный элемент: I, 6, 1.
Нормированная алгебра: I, 2, 1.

Обертывающая алгебра инволютивной банаховой алгебры: I, 6, 6.
Оболочка полиномиально выпуклая: I, Приложение.
Основание алгебры: I, 1, 1.
Отображение каноническое из G в $\widehat{G}$: II, 1, 1.

Пик в компактном пространстве: I, 7, упр. 10.
Планшереля теорема: II, 1, 3.

Подалгебра инволютивная: I, 6, 1.
— логмодулярная: I, 7, 8.
— наполнеиная: I, 1, 4 и I, 2, 4.
Подгруппа однопараметрическая: II, 2, упр. 11.
Подмножество самосопряжеиное: I, 6, 1.
Полиномиально выпуклая оболочка: I, Приложение.
— — часть: I, Приложение.
C^*-полуиорма: I, 6, 6.
Полярное разложение элемента из $\mathscr{L}(E; F)$: 1, 6, 8.
Понтрягина теорема: II, 1, 5.
Представление алгебры: I, 1, 7.
— — неприводимое: I, 1, 7.
Представлеиия эквивалентные: I, 1, 7.
Преобразоваиие Гельфанда: I, 2, 5 и I, 2, 6.
— Фурье: II, 1, 2 и II, 1, 3.
Примитивный идеал: I, 1, 7.
Пространство характеров коммутативной аглгебры: I, 1, 6.
— — — — с единицей: I, 1, 5.

Раднус спектральный: I, 2, 3.
Регулярная коммутатнвная банахова алгебра: I, 5, 1.
Регулярное представленне (левое): I, 6, 7.
Регулярный элемент: I, 2, упр. 28.
Резольвента элемента в алгебре с единицей: I, 1, 2.
Росток голоморфной функции: I, 4, 1.

Самосопряженная линейная форма: I, 6, 1.
Самосопряженное подмножество: I, 6, 1.
Самосопряженный элемеит в инволютивной алгебре: I, 6, 1.
Система топологнческих образующих нормированной алгебры: I, 2, 1.
Слабо осциллирующая функция: II, 3, 1.
Совместный спектр: I, 3, 5.
Спектральный радиус: I, 2, 3.
Спектр элемента в алгебре: I, 1, 3.
— — — — с единицей: I, 1, 2.

Теорема Гельфаида — Мазура: I, 2, 5.
— Планшереля: II, 1, 5.
— Понтрягина: II, 1, 5.
Топология Джекобсона: I, 1, 7.

Унитарный характер: II, 1, 1.
— элемент: I, 6, 1.
Условне Диткина: I, 5, 2.

Форма линейная, эрмитова: I, 6, 1.
Формула обращения Фурье: II, 1, 4.
— Пуассона: II, 1, 8.
Функция Мёбиуса: II, 3, упр. 7.
— медленно убывающая: II, 3, упр. 4.
— слабо осцнллирующая: II, 3, 2.
— Эрмита: II, 1, упр. 2.
Фурье преобразоваиие меры (функцни): II, 1, 2 и II, 1, 3.

Характер коммутативной алгебры с единицей: I, 1, 6.
— унитарный локально компактиой коммутативной группы: II, 1, 1.

Часть антисимметричная в компактном пространстве: I, 7, упр. 10.
— полиномиально выпуклая: I, Приложение.

Элемент квазнпильпотентный нормированной алгебры: I, 2, 3.
— унитарный ниволютивной алгебры: I, 6, 1.
Элементы ортогональные из двойственных групп. II, 1, 1.
— топологически порождающие нормированную алгебру: 1, 2, 1.
Эрмитова форма: I, 6, 1.
Эрмитов элемент инволютивной алгебры: I, 6, 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 5

Глава I. **Нормированные алгебры** 7

§ *1. Общие сведения об алгебрах* 7

1. Алгебры с единицей 7
2. Спектр элемента в алгебре с единицей 7
3. Спектр элемента в алгебре 10
4. Наполненные подалгебры 11
5. Характеры коммутативной алгебры с единицей 11
6. Случай алгебр без единицы 14
7. Примитивные идеалы 15

§ *2. Нормированные алгебры* 19

1. Общие сведения 19
2. Примеры 20
3. Спектральный радиус 22
4. Обратимые элементы 23
5. Спектр элемента в нормированной алгебре 25
6. Спектр относительно подалгебры 28

§ *3. Коммутативные банаховы алгебры* 29

1. Характеры коммутативной банаховой алгебры 29
2. Примеры 30
3. Преобразование Гельфанда 31
4. Морфизмы коммутативных банаховых алгебр 34
5. Совместный спектр 36

§ *4. Голоморфное функциональное исчисление* 39

1. Формулировка основной теоремы 39
2. Построение некоторых дифференциальных форм 40
3. Построение отображений Θ_a 44
4. Простейшие свойства отображений Θ_a 45
5. Два результата о плотности 51
6. Доказательство теоремы 1 52
7. Суперпозиция в функциональном исчислении 54
8. Случай одной переменной 55
9. Экспонента и логарифм 58
10. Разбиения пространства характеров 60
11. Разбиения спектра элемента алгебры 62

§ *5. Регулярные коммутативные банаховы алгебры* 65

1. Определение и простейшие свойства 65
2. Гармонический синтез 67

§ *6. Инволютивные нормированные алгебры* 70

1. Инволютивные алгебры 70
2. Инволютивные нормированные алгебры 73

3. C^*-алгебры 74
4. Коммутативные C^*-алгебры 77
5. Функциональное исчисление в C^*-алгебрах 78
6. C^*-алгебра, обертывающая инволютивную банахову алгебру 81
7. C^*-алгебра локально компактной группы 82
8. Положительные эндоморфизмы гильбертовых пространств 84

§ 7. *Алгебры непрерывных функций на компактном пространстве* 87
1. Подалгебры в $\mathscr{C}(\Omega)$ (Ω — компактное пространство) . . . 87
2. Случай $\Omega \subset \mathbf{C}^{\Lambda}$ 92
3. Случай $\Omega \subset \mathbf{C}$ 93

Приложение 95
Упражнения 97

Глава II. **Коммутативные локально компактные группы** 122

§ 1. *Преобразование Фурье* 122
1. Унитарные характеры коммутативной локально компактной группы 122
2. Определение преобразования Фурье 126
3. Теорема Планшерели 128
4. Формула обращения Фурье (предварительный случай) . . 132
5. Теорема двойственности 133
6. Непосредственные следствия теоремы двойственности . . 135
7. Функториальные свойства двойственности 137
8. Формула Пуассона 140
9. Примеры двойственности 143

§ 2. *Структура коммутативных локально компактных групп* . . 147
1. Группы, порожденные компактными частями 147
2. Общий случай 150

§ 3. *Гармонический синтез в пространствах* $L^1(G)$, $L^2(G)$, $L^\infty(G)$ 152
1. Гармонический синтез в $L^1(G)$ 152
2. Гармонический синтез в $L^\infty(G)$ 159
3. Гармонический синтез в $L^2(G)$ 161

Упражнения 164
Указатель обозначений 178
Указатель терминов 180